# Вычисление оптимального управления методом последовательных приближений

*И. В. Бейко*

З а д а ч а 1. *Найти такое управление $u(t)$, принадлежащее в каждый момент* времени *$t$ замкнутому, выпуклому и ограниченному множеству $\Omega(t)$ в пространстве $E_r$ переменной $u = (u_1, u_2, \ldots, u_r)$, чтобы заданный функционал $\Phi(x(T, u))$ принял минимальное значение в фиксированный момент времени $t = T > 0$.*

Здесь $x(t, u)$ — решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(t), t) \qquad (x = x_1, \ldots, x_n), \tag{1}$$

$$x(0) = x^0. \tag{2}$$

Если предположить, что множество $X(T, \Omega)$ точек $x(T, u)$, полученных при всевозможных управлениях $u(t) \in \Omega$, является ограниченным и замкнутым и что градиент $\nabla\Phi(x)$ выпуклого функционала $\Phi(x)$ на этом множестве не равен нулю, то [1] точка минимума $x_0$ функционала $\Phi(x)$ на множестве $X(T, \Omega)$ является также точкой минимума функционала $(\nabla\Phi(x_0), x)$ на $X(T, \Omega)$ и, таким образом, задача 1 сводится к задаче отыскания управления $\bar{u}_0(t) \in \Omega$, удовлетворяющего соотношение

$$(\nabla\Phi(x(T, \bar{u}_0)), \quad x(T, \bar{u}_0)) = \min_{u\in\Omega}(\nabla\Phi(x(T, \bar{u}_0)), x(T, u)), \tag{3}$$

Будем предполагать, что вторые частные производные от функции $f_i(x, u, t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ ограничены при всех $x \in X(t, \Omega)$, $u \in \Omega$, $t \in [0, T]$. Как известно из работы [2], управление $\bar{u}_0(t)$, удовлетворяющее (3), удовлетворяет соотношению (принципу максимума):

$$\begin{aligned}&(f(x(t, \bar{u}_0), \bar{u}_0(t), t),\ \psi(t, -\nabla\Phi(x(T, \bar{u}_0)))) = \\ &= \max_{v\in\Omega}(f(x(t, \bar{u}_0), v, t), \quad \psi(t, -\nabla\Phi(x(T, \bar{u}_0))));\end{aligned} \tag{4}$$

$$\frac{d\psi_j(t, c)}{dt} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(x(t, \bar{u}_0), \bar{u}_0(t), t)}{\partial x_j}\psi_i(t, c), \psi(T, c) = c; \tag{5}$$

$$c = -\nabla\Phi(x(T, \bar{u}_0)),\ j = 1, \ldots, n.$$

Управление $u_0(t) \in \Omega$, удовлетворяющее (4), (5), будем находить по итерационной формуле:

$$u^{(k+1)}(t) = u^{(k)}(t) + \delta u^{(k)}(t), \tag{6}$$

где вариация $\delta u^{(k)}(t)$ определяется соотношением

$$(B_k(t)\,\delta u^{(k)}(t), \bar{\psi}(t, d^{(k)})) = \max_{v\in E^{(k)}_{\Delta(k)}}(B_k(t)\,v, \bar{\psi}(t, d^{(k)})), \tag{7}$$

$\psi^{(k)}(t, c)$ — решение задачи Коши

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = -A_k^*(t)\,\bar{\psi},\ \bar{\psi}(T) = c; \tag{8}$$

$d^{(k)} = -\operatorname{grad}\Phi(x(T, u^{(k)}))$, элементами $a_{ij}(t), b_{il}(t)$ матриц $A_k(t), B_k(t)$ являются

$$a_{ij}(t) = \frac{\partial f_i(x, u, t)}{\partial x_j}\bigg|_{\substack{x=x(t,u^{(k)})\\u=u^{(k)}(t)}}, \qquad b_{il}(t) = \frac{\partial f_i(x, u, t)}{\partial u_l}\bigg|_{\substack{x=x(t,u^{(k)})\\u=u^{(k)}(t)}};$$

$E_{\Delta}^{(k)}$ — множество вариаций $\delta u(t)$, удовлетворяющих условиям $|\delta u_i(t)| \leqslant \Delta$, $i = 1, \ldots, n$; $u^{(k)}(t) + \delta u(t) \in \Omega$; $\Delta^{(k)} > 0$ — максимальное число, удовлетворяющее неравенству

$$\Phi(x(T, u^{(k)} + \delta u^{(k)})) \leqslant \Phi(x(T, u^{(k)})) - s_1[\Delta^{(k)}]^2, \tag{9}$$

полученное последовательным делением пополам некоторого наперед выбранного числа $\Delta_1 > 0$ (можно взять $\Delta_1 = \Delta^{(k-1)}$), а $s_1 > 0$ — любое выбранное число (желательно малое).

Теорема. *Если при любых $u \in \Omega$, $t \in [0, T]$, $x \in X(t, \Omega)$, $\psi$ функции $\Phi(x)$, $f_i(x, u, t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ имеют ограниченные вторые частные производные, функция $(f(x, u, t), \psi)$ вогнута по $u$ и множество $\Omega$-выпукло, то при любом первоначально выбранном управлении $u^{(1)}(t) \in \Omega$ итерационная формула* (6) *определяет такую последовательность управлений $u^{(k)}(t) \in \Omega$, что*

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{n} (u_i^{(k)}(t) - u_0(t))^2\, dt \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $u^{(k)}(t) \in \Omega$ — уже найденное $k$-е приближение к $u_0(t)$.

Обозначим через $M(\psi, x, t)$ множество векторов $\bar{u}$, удовлетворяющих в момент времени $t$ соотношению

$$(f(x, \bar{u}, t), \psi) = \max_{v \in \Omega}(f(x, v, t), \psi). \tag{11}$$

Если $u^{(k)}(t) \in M(\psi^{(k)}(t, d^{(k)}), x(t, u^{(k)}), t)$ при всех $t \in [0, T]$, то, очевидно, $u^{(k)}(t) = u_{0n}(t)$ (условимся считать $u'(t) = u''(t)$, если только $x(t, u') = x(t, u'')$ при всех $t \in [0, T]$. В силу этого два допустимых управления, отличающиеся на множестве меры нуль, считаются равными).

Из вогнутости $f((x, u, t), \psi)$ следует, что

$$s(\sigma) = \min_{\substack{i=1,\ldots,r,\, x\in X(t,\Omega),\, t\in[0,T]\\ \min\limits_{v\in M(\psi,x,t)} |u_i - v_i| = \sigma,\, \|\psi\|=1}} \left|\frac{\partial}{\partial u_i}(f(x, u, t), \psi)\right| \tag{12}$$

является при $\sigma > 0$ строго положительной, монотонно возрастающей функцией аргумента $\sigma$, т. е.

$$0 < s(\sigma_1) \leqslant s(\sigma_2) \text{ при } 0 < \sigma_1 < \sigma_2. \tag{13}$$

Если $u^{(k)}(t)$ не удовлетворяет принципу максимума (4), (5), то существует такое множество $I \subset [0, T]$ моментов времени $t$ и такая компонента $u_p^{(k)}(t)$ управления $u^{(k)}(t)$, что $|I| \neq 0$ ($|I|$ — мера множества $I$) и

$$\varrho_p^{(k)}(t) = \min_{v \in M(\psi^{(k)}(t, d^{(k)}), x(t, u^{(k)}), t)} |u_v^{(k)}(t) - v_p| > 0 \text{ при } t \in I. \tag{14}$$

Пусть $I_1 \subset I$ — такое множество, что

$$\int_I \varrho_p^{(k)}(t)\, dt = 2|I_1|\Delta_1, \text{ где } \Delta_1 = \min_{t\in I_1} \varrho_p^{(k)}(t) \geqslant \max_{\substack{t\in I\\ t\bar{\in} I_1}} \varrho_p^{(k)}(t). \tag{15}$$

Пусть $\Delta \in (0, \Delta_1]$ — некоторое выбранное число. Из (15) следует, что вариация

$$\delta\bar{u}_i^{(k)}(t) = \begin{cases} \Delta \operatorname{sign} \dfrac{\partial}{\partial u_i} (f(x(t, u^{(k)}), u^{(k)}(t), t), \psi(t, d^{(k)})) & \text{при } i = p, t \in I_1, \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

принадлежит $E_\Delta^{(k)}$. Пусть $\delta x(t, \delta u)$ — решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt}\delta x = A_k(t)\,\delta x + B_k(t)\,\delta u, \qquad \delta x(0) = 0. \tag{16}$$

Так как вариация $\delta u^{(k)}(t) \in E_\Delta^{(k)}$, определенная соотношением

$$(B_k(t)\,\delta u^{(k)}(t), \psi^{(k)}(t, d^{(k)})) = \max_{v \in E_\Delta^{(k)}} (B_k(t)\,v, \psi^{(k)}(t, d^{(k)})), \tag{17}$$

удовлетворяет [3] условию

$$(\delta x(T, \delta u^{(k)}), -d^{(k)}) = \min_{v \in E_\Delta^{(k)}} (\delta x(T, v), -d^{(k)}), \tag{18}$$

а вариация $\delta\bar{u}^{(k)}(t) \in E_\Delta^{(k)}$, то, очевидно,

$$-(\delta x(T, \delta u^{(k)}), d^{(k)}) \leqslant -(\delta x(T, \delta\bar{u}^{(k)}), d^{(k)}). \tag{19}$$

Пусть $\Psi_k(t, \tau)$, $\Phi_k(t, \tau)$ — матрицы фундаментальных решений, соответственно, системы (8) и системы

$$\frac{d}{dt}\delta x = A_k(t)\,\delta x,$$

удовлетворяющие условиям $\Phi_k(\tau, \tau) = \Psi_k(\tau, \tau) = E$ ($E$ — единичная матрица). Тогда [4]

$$\begin{aligned}(\delta x(T, \delta\bar{u}^{(k)}), -d^{(k)}) &= \left( \int_0^T \bar{\Phi}_k(T, 0)\,\Psi_k^*(\tau, 0)\,B_k(\tau)\,\delta\bar{u}^{(k)}(\tau)\,d\tau, -d^{(k)} \right) = \\ &= -\int_{I_1} (\delta\bar{u}^{(k)}(\tau), B_k^*(\tau)\,\Psi_k(\tau, 0)\,\Phi_k^*(T, 0)\,d^{(k)})\,d\tau = \\ &= -\Delta \int_{I_1} 1 \cdot \operatorname{sign}(B_k^*(\tau)\,\Psi_k(\tau, 0)\,\Psi_k^{-1}(T, 0)\,d^{(k)})_p \times \\ &\quad \times (-B_k^*(\tau)\,\Psi_k(\tau, 0)\,\Phi_k^*(T, 0)\,d^{(k)})_p\,d\tau. \end{aligned} \tag{20}$$

Учитывая (19), (12) и тот факт [4], что $\Psi_k^{-1}(T, 0) = \Phi_k^*(T, 0)$, получаем

$$\begin{aligned}(\delta x(T, \delta u^{(k)}), -d^{(k)}) &\leqslant -\Delta \int_{I_1} |(B_k^*(\tau)\,\psi^{(k)}(\tau, d^{(k)}))_p|\,d\tau \leqslant \\ &\leqslant -\Delta \int_{I_1} \frac{s(\Delta_1)\,d\tau}{\|\psi(\tau, d^{(k)})\|}. \end{aligned} \tag{21}$$

Легко показать существование таких чисел $m_0 > 0$, $m_1 < \infty$, что

$$m_0 \leqslant \|\psi(\tau, d^{(k)})\| \leqslant m_1 \tag{22}$$

при всех $\tau \in [0, T]$, $x \in X(\tau, \Omega)$. Тогда из (22), (21) имеем

$$(\delta x(T, \delta u^{(k)}), -d^{(k)}) \leqslant -\frac{1}{m_1}\,|I_1|\,s(\Delta_1)\,\Delta. \tag{23}$$

Докажем теперь, что вариация $\delta u^{(k)}(t)$, вычисленная при $\Delta \in \left(0, \min\left\{\Delta_1, \frac{|I_1|\, s(\Delta_1)}{2m_1 m_5}\right\}\right]$, удовлетворяет неравенству

$$\Phi(x(T, u^{(k)} + \delta u^{(k)})) \leqslant \Phi(x(T, u^{(k)})) - \frac{1}{2m_1}|I_1|\, s(\Delta_1)\,\Delta \tag{24}$$

($m_5 > 0$ — определенная ниже константа, не зависящая от управления $u^{(k)}(t) \in \Omega$).

Пусть $z(t) = x(t, u^{(k)} + \delta u^{(k)}) - x(t, u^{(k)})$. Учитывая ограниченность вторых частных производных от функций $f_i(x, u, t)$ при всех $x \in X(t, \Omega)$, $u \in \Omega$, $t \in [0, T]$, имеем

$$\frac{dz}{dt} = A_k(t)\, z + B_k(t)\,\delta u^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \bar{u}, t)}{\partial x_i \partial x_j} z_i z_j +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \bar{u}, t)}{\partial x_i \partial u_j} z_i\, \delta u_j^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \bar{u}, t)}{\partial u_i \partial u_j}\, \delta u_i^{(k)}(t)\, \delta u_j^{(k)}(t), \tag{25}$$

$$z(0) = 0$$

(здесь выражение $\sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial s_j} w_i v_j$ означает $n$-мерный вектор

$$\left(\sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f_1}{\partial p_i \partial s_j} w_i v_j, \ \ldots, \ \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f_n}{\partial p_i \partial s_j} w_j v_j\right),$$

$\bar{x}$, $\bar{u}$ — некоторые точки множеств $X(t, \Omega)$, $\Omega$).

Если разность $x(t, u^{(k)} + \delta u^{(k)}) - x(t, u^{(k)})$ представить в виде $\delta x(t, \delta u^{(k)}) + r(t)$, то, учитывая (16), получим из (25):

$$\frac{dr}{dt} = A_k(t)\, r + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \bar{u}, t)}{\partial x_i \partial x_j} (\delta x_i(t, \delta u^{(k)}) + r_i)(\delta x_j(t, \delta u^{(k)}) + r_j) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \bar{u}, t)}{\partial x_i \partial u_j} (\delta x_i(t, \delta u^{(k)}) + r_i)\, \delta u_j^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \bar{u}, t)}{\partial u_i \partial u_j}\, \delta u_i^{(k)}(t)\, \delta u_j^{(k)}(t),$$

$$r(0) = 0. \tag{26}$$

Докажем существование такого числа $M_2 < \infty$, что при всех $u^{(k)}(t) \in \Omega$ имеет место

$$\| r(T) \| \leqslant M_2 \Delta^2. \tag{27}$$

Умножим скалярно обе части (16) на $\delta x$. Получим

$$\frac{d}{dt}\|\delta x\|^2 = 2\,\frac{(A_k(t)\,\delta x, \delta x)}{(\delta x, \delta x)}\|\delta x\|^2 + 2\,(B_k(t)\,\delta u, \delta x). \tag{28}$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\| \delta x (t, \delta u^{(k)}) \|^2 = e^{2 \int\limits_0^t \frac{(A_k(\tau)\delta x, \delta x)}{(\delta x, \delta x)} \delta\tau} \Big(\| \delta x (0, \delta u^{(k)}) \|^2 +$$

$$+ 2 \int\limits_0^t (B_k(\tau)\, \delta u^{(k)}(\tau), \delta x (\tau, \delta u^{(k)}))\, e^{-2 \int\limits_0^\tau \frac{(A_k(\xi)\delta x, \delta x)}{(\delta x, \delta x)} d\zeta} d\tau\Big).$$

Поэтому

$$\| \delta x (t, \delta u^{(k)}) \| \leqslant 2\, e^{4 \int\limits_0^t \|A_k(\tau)\| d\tau} \int\limits_0^t \| B_k(\tau)\, \delta u^{(k)}(\tau) \| \, \| \delta x (\tau, \delta u^{(k)}) \| \, d\tau. \quad (29)$$

Очевидно,

$$N_1 = \max_{\substack{t \in [0,T] \\ \bar{x} \in X(t,\Omega) \\ \bar{u} \in \Omega}} e^{4 \int\limits_0^t \|A(\tau)\| d\tau} < \infty; \quad (30)$$

$$N_2 = \max_{\substack{t \in [0,T] \\ \bar{x} \in X(t,\Omega) \\ \bar{u} \in \Omega \\ u_i \leqslant 1}} \int\limits_0^t \| B_k(\tau)\, u(\tau) \| \, d\tau < \infty. \quad (31)$$

Учитывая, что $| \delta u_i^{(k)}(t) | \leqslant \Delta$ $(i = 1, \ldots, 2)$ из (31) имеем

$$\frac{1}{\Delta} \| B_k(\tau)\, \delta u^{(k)}(\tau) \| \leqslant N_2. \quad (32)$$

Если $t' \in [0, T]$ — такой момент времени, что $\| \delta x (t', \delta u^{(k)}) \| = \max\limits_{t \in [0,T]} \| \delta x (t, \delta u^{(k)}) \|$, то из (29), (30), (31) следует

$$\| \delta x (t', \delta u^{(k)}) \|^2 \leqslant 2 N_1 t' N_2 \Delta \| \delta x (t', \delta u^{(k)}) \|,$$

т. е. при всех $t \in [0, T]$, $u^{(k)} \in \Omega$ имеет место оценка

$$\| \delta x (t, \delta u) \| \leqslant M_1 \Delta \qquad (M_1 = 2 N_1 T N_2). \quad (33)$$

Представим систему (26) в виде

$$\frac{dr}{dt} = R(t)\, r + k(t), \quad (34)$$

где вектор $k(t)$ состоит только из тех слагаемых, в которые не входят компоненты вектора $r$ (естественно, элементы матрицы $R(t)$ будут содержать компоненты вектора $r$).

В силу (33), неравенств $| \delta u_i^{(k)}(t) | \leqslant \Delta$ $(i = 1, \ldots, r)$ и ограниченности вторых частных производных от $f_j(\bar{x}, \bar{u}, t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ из (26) следует существование такого числа $M_3 < \infty$, что при любых $t \in [0, T]$, $u^{(k)}(t) \in \Omega$ имеет место

$$\| k(t) \| \leqslant M_3 \Delta^2. \quad (35)$$

Умножим скалярно обе части уравнения (34) на $r$. Интегрирование полученного уравнения даст

$$\| r(t) \|^2 = e^{2\int_0^t \frac{(R(\tau)r,r)}{(r,r)}d\tau} \left( \| r(0) \|^2 + 2\int_0^t (k(\tau), r(\tau))\, e^{-2\int_0^\tau \frac{(R(\xi)r,r)}{(r,r)}d\xi} d\tau \right). \quad (36)$$

Так как коэффициенты и свободные члены уравнения (26) ограничены, то решение этого уравнения, при условии $r(0) = 0$, а значит, и коэффициенты матрицы $R(t)$ являются ограниченными на интервале $t \in [0, T]$ при любом $u^{(k)}(t) \in \Omega$.

Поэтому

$$\max_{\substack{t\in[0,T]\\ \bar{x}\in X(t,\Omega)\\ \bar{u}\in\Omega}} e^{4\int_0^t \frac{(R(\tau)r,r)}{(r,r)}d\tau} \leqslant \max_{\substack{t\in[0,T]\\ \bar{x}\in X(t,\Omega)\\ \bar{u}\in\Omega}} e^{4\int_0^t \|R(\tau)\| d\tau} = N_3 < \infty. \quad (37)$$

Пусть $\| r(t'') \| = \max_{t\in[0,T]} \| r(t) \|$, $t'' \in [0, T]$. Тогда в силу (35), (37) и (26) из (36) имеем

$$\| r(t'') \|^2 \leqslant 2N \int_0^{t''} \| k(t) \| \, \| r(t'') \| \, dt \leqslant 2N_3 M_3 \Delta^2 \| r(t'') \| t''$$

и, положив $M_2 = 2N_3 M_3 T$, получим (27).

Так как вторые частные производные от $\Phi(x)$ ограничены на $X(T, \Omega)$ некоторым числом $M_4 < \infty$, то

$$\Phi(x(T, u^{(k)} + \delta u^{(k)})) - \Phi(x(T, u^{(k)})) = (\nabla\Phi(x(T,u^{(k)})), x(T, u^{(k)} + \delta u^{(k)}) - x(T, u^{(k)})) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} (x_i(T, u^{(k)} + \delta u^{(k)}) - x_i(T, u^{(k)}))(x_j(T, u^{(k)} + \delta u^{(k)}) -$$

$$- x_j(T, u^{(k)})) \leqslant (\nabla\Phi(x(T, u^{(k)})), \delta x(T, \delta u^{(k)})) +$$

$$+ (\nabla\Phi(x(T, u^{(k)})), r(T)) + n^2 M_4 \| \delta x(T, \delta u^{(k)}) + r(T) \|^2.$$

Если учесть (23), (27), (33), (22) и то, что $\Delta \leqslant d = \max_{i, v' \in\Omega, v'' \in\Omega} | v_i' - v_i'' |$, то получим

$$\Phi(x(T, u^{(k)}) + \delta u^{(k)}) - \Phi(x(T, u^{(k)})) \leqslant -\frac{1}{m_1} | I_1 | s(\Delta_1) \Delta + m_3 M_2 \Delta^2 +$$

$$+ n^2 M_4 M_1^2 \Delta^2 + 2n^2 M_4 M_1 d M_2 \Delta^2 + M_4 n^2 M_2^2 d^2 \Delta^2 \leqslant -\frac{1}{m_1} | I_1 | s(\Delta_1) \Delta + m_5 \Delta^2, \quad (38)$$

где $m_5 = m_3 M_2 + n^2 M_4 M_1^2 + 2n^2 M_4 M_1 d M_2 + M_4 n^2 M_2^2 d^2$. Так как при

$$\Delta \in \left(0, \frac{| I_1 | s(\Delta_1)}{2m_1 m_5}\right) m_5 \Delta^2 - \frac{1}{m_1} | I_1 | s(\Delta_1) \Delta \leqslant -\frac{1}{2m_1} | I_1 | s(\Delta_1) \Delta,$$

то из (38) имеем (24).

Пусть $\gamma = \min\left\{\Delta_1, \frac{| I_1 | s(\Delta_1)}{2m_1 m_5}, \frac{| I_1 | s(\Delta_1)}{2m_1 s_1}\right\}$. Так как $s_1 \Delta^2 < \frac{| I_1 | s(\Delta_1) \Delta}{2m_1}$ при $\Delta \in (0, \gamma)$, то $u^{(k+1)}(t)$ будет найдена при $\Delta^{(k)} \geqslant \frac{\gamma}{2}$, т. е. имеем

$$\Phi(x(T, u^{(k+1)})) - \Phi(x(T, u^{(k)})) \leqslant -\frac{\gamma^2}{4}. \quad (39)$$

Учитывая ограниченность $\Phi(x)$ снизу на $X(T, \Omega)$ из (24) получаем, что $\gamma \to 0$ при $k \to \infty$, т. е. в силу (13) $\underset{T}{|}\, I_1 | \Delta_1 \to 0$ при $k \to \infty$, и из (15) имеем, что для всех $i (= 1, 2, \ldots, r)$ $\int\limits_0^T \varrho_i^{(k)}(t)\, dt = 2 | I_1 | \Delta_1 \to 0$ при $k \to \infty$.

Отсюда следует (10) и теорема доказана.

Предложенный метод допускает некоторые модификации. Так в [5] управление $u^{(k+1)}(t)$ находилось по формуле

$$u^{(k+1)}(t) \equiv u^{(k+1)}(t, \bar{c}) = u^{(k)}(t) + \delta u^{(k)}(t, \bar{c})$$

($\delta u^{(k)}(t, \bar{c})$ — управление, удовлетворяющее соотношению (7) при $d^{(k)} = \bar{c}$), где вектор $\bar{c}$ согласно неравенству $\Phi(x(T, u^{(k+1)})) - \Phi(x(T, u^{(k)})) \leqslant -s_1 \Delta^2$ находится по итерационной формуле

$$c^{(s+1)} = c^{(s)} - \lambda' [-d^{(k)} + x(T, u^{(k+1)}(c^{(s)})) - x(T, u^{(k)})] \tag{40}$$

($c^{(0)} = d^{(k)}$, $\lambda' > 0$ выбирается делением пополам) из условия $(\nabla\Phi(x(T, u^{(k)})), \bar{d}^{(s+1)} \| \bar{d}^{(s+1)} \|^{-1}) < (-d^{(k)}, \bar{d}^{(s)} \| \bar{d}^{(s)} \|^{-1})$, где $\bar{d}^{(s)} = x(T, u^{(k+1)}(c^{(s)})) - x(T, u^{(k)})$.

Очень часто управление $u^{(k+1)}(t) = u^{(k+1)}(t, c^{(1)})$ получается при $\Delta$ большем, чем управление (40).

Если $\Phi(x(T, u^{(1)})) \leqslant \delta$, и $u^{(k+1)}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ вычислять при $T = T^{(k)}$, где $T^{(k)} > 0$ — минимальное значение времени $t$, при котором $\Phi(x(t, u^{(k)})) \leqslant \delta$, то, очевидно, последовательность $\{u^{(k)}(t)\}$ сходится к экстремальному решению задачи II:

*Найти такое управление $u(t) \in \Omega$, которое переводит управляемую систему на множество $\Phi(x) \leqslant \delta$ за минимальное время.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Зойтендейк, Методы возможных направлений, ИЛ, 1963.
2. Л. И. Розоноэр, Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, I, II, Авт. и телем., № 10, 11, 1959.
3. Б. Н. Пшеничный, Численный метод расчета оптимального по быстродействию управления для линейных систем, Ж. вычислит. матем. и матем. физики, № 1, 1964.
4. В. Е. Шаманский, Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ, ч. I, Изд-во АН УССР, К., 1963.
5. И. В. Бейко, Численные методы решения некоторых нелинейных задач, связанных с оптимальным управлением, I. Тр. I респ. конф. молодых исследователей по матем., Изд-во АН УССР, К., 1964.

Поступила 20.XI 1964 г.
Киев