Обобщенное фундаментальное решение эллиптических систем дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами

Л. С. Парасюк

В работе [1] доказано существование фундаментального решения для эллиптических систем дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами для достаточно малых областей и изучены его локальные свойства.

В настоящей заметке рассматривается фундаментальное решение для таких систем в некоторой произвольной области.

Пусть $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — эллиптический дифференциальный оператор вида

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = A_s\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{1}{|x|^{\alpha_1}} A_{s-1}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \ldots + \frac{1}{|x|^{\alpha_s}} A_0(x), \tag{1}$$

коэффициенты которого — действительные квадратные матрицы, определенные для значений $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 2)$ в некоторой области D', содержащей точку «ноль» — особенность коэффициентов оператора (1). Предполагается также, что коэффициенты оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ при производных $k \leqslant s$ порядка $(s \geqslant 2)$ дифференцируемые $k + t$ раз $(t \geqslant 0)$ и эти производные удовлетворяют условию Липшица.

Пусть D — конечная область, ограниченная достаточно гладкой границей Γ, которая лежит вместе с границей в некоторой области D' $(\bar{D} \subset D')$. Имеет место такая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы существовала фундаментальная матрица решений оператора* $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *во всей области* D''' $(\bar{D}''' \subset D''$, $\bar{D}'' \subset D')$, *необходимо и достаточно, чтобы сопряженное уравнение*

$$A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) V(x) = 0$$

не имело бы ненулевого решения в D'', *равного нулю в граничной полоске области* D''.

Если не выполняется условие, указанное в теореме, то фундаментальное решение для оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ существует тогда в обобщенном смысле.

Матрица $\omega(x, y)$ будет называться обобщенным фундаментальным решением оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, если имеет место следующее равенство

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega(x, y) = f(x)\, \Psi^{(1)}(y). \tag{2}$$

При этом предполагается, что $\Psi^{(1)}(y)$ имеет независимые столбцы и типа $V(x)$, а $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{D''} \Psi^{(1)}(x)\, f(x)\, dx = -I, \tag{3}$$

где I — единичная матрица.

Заметим при этом, что обобщенная фундаментальная матрица $\omega(x, y)$ имеет особенность обычного типа и по методу Леви—Лопатинского ищется в виде

$$\omega(x, y) = \omega_1(x, y) + \int\limits_{D'''} \omega_1(x, z)\, g(z, y)\, dz, \tag{4}$$

где

$$\omega_1(x, y) = \omega_s(x, y) + a(x)\, b(y), \tag{5}$$

а матрица $\omega_s(x, y)$ — фундаментальное решение однородного оператора $A_s\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, коэффициенты которого постоянны. Матрицы $a(x)$ и $b(y)$ не имеют особенностей во всей области D'' и подбираются так, что при отсутствии решения $V(x)$ интегральное уравнение

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_1(x, y) + g(x, y) + \int\limits_{D'''} A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_1(x, z)\, g(x, y)\, dz = 0 \tag{6}$$

было бы разрешимо по первой теореме Фредгольма.

При наличии таких решений $V(x)$, которых может быть только конечное количество «r», матрицы $a(x)$ и $b(y)$ подбираются так, чтобы интегральное уравнение

$$\Psi(y) + \int_{\dot{D}''} \Psi(x) A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_1(x, y)\, dx = 0$$

имело бы только эти «r» независимых решений. Эти замечания и предполагаются при построении обобщенного фундаментального решения.

Теорема 2. *Пусть в некоторой области D'' существуют обобщенные фундаментальные матрицы $\omega_1(x, y)$ и $\omega_2(x, y)$ операторов $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ и $A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$. Пусть коэффициенты этих операторов дифференцируемые в области D'' s раз и s-е производные удовлетворяют условию Липшица, тогда в любой подобласти D_1 $(D_1 \subset D'')$ существует нормальная обобщенная фундаментальная матрица $\overline{\omega}(x, y)$, которая может быть представлена в виде*

$$\overline{\omega}(x, y) = \omega_2'(y, x) - \int_{D_1} \omega_1(x, z) A\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) \omega_2'(y, z)\, dz \tag{7}$$

и обладает следующими свойствами:

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \overline{\omega}(x, y) = f(x)\, \Psi^{(1)}(y), \tag{8}$$

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \overline{\omega}(x, y) = g(x)\, \varphi^{(1)}(y). \tag{9}$$

При этом $\varphi^{(1)}$ — типа V для оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, а $\Psi^{(1)}$ — типа V для сопряженного по Лагранжу оператора $A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Парасюк, ДАН УРСР, № 8, 1963.
2. Я. Б. Лопатинский, УМЖ, т. III, № 3, 1951.

Поступила 11.I 1966 г.
Львов

Аналитическое продолжение разложений по многочленам Гегенбауэра и его применение к исследованию свойств амплитуды рассеяния

О. С. Парасюк

Пусть $F(z)$ — функция, заданная своим разложением в ряд по многочленам Гегенбауэра:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^{\nu}(z). \tag{1}$$

Рассмотрим функцию $f(z)$, заданную своим разложением в ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{2}$$

с теми же коэффициентами.

Можно поставить интересный вопрос, в каком соответствии находятся особенности аналитических продолжений функций (1) и (2).

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, доказанная Фабером [1, 2] для случая $\nu = \frac{1}{2}$, т. е. для разложений по многочленам Лежандра.

Теорема 1. *Если степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

имеет радиус сходимости $r > 1$, то бесконечный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^{\nu}(z) \tag{3}$$

определяет аналитическую функцию $F(z)$. Между особыми точками функции $F(z)$, которые обозначим через β, и особыми точками α функции $f(z)$, определяемой рядом (1), имеется такая зависимость, что каждой особой точке α функции $f(z)$ соответствует особая точка β функции $F(z)$, заданная уравнением

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right), \tag{4}$$

и при таком соответствии получаются все особые точки функции $F(z)$. Только в случае, когда функция $F(z)$ многозначна, точки $0, +1, -1$ (не лежащие на первом листе!) могут оказаться особыми для $F(z)$, несмотря на то, что соответствующие им точки $\alpha = \pm i, 1, -1$ не были особыми для $f(z)$. Возможна и обратная ситуация, когда точки $\pm i$ являются особыми для некоторой ветви $f(z)$, но им соответствующая точка $\beta = 0$ не обладает этим свойством. Кроме того, также точки $\alpha = 0, \infty$ и $\beta = \infty$ выпадают из соответствия, установленного теоремой.

Доказательство Фабера требует некоторых уточнений, которые следуют из работы [2], посвященной мультипликационной теореме Адамара, лежащей в основе сформулированной выше теоремы Фабера. Нетрудно видеть, что оно проходит и для $\nu \neq \frac{1}{2}$, т. е. для случая разложений по ультрасферическим многочленам.

Комбинируя теорему Фабера с одной теоремой Desainta [2] и результатом заметки [5], мы приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^{\nu}(z) \tag{5}$$

функция, заданная своим разложением в ряд, который сходится в некотором эллипсе.

Построим функцию

$$\Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(a_n)\, C_n^{\nu}(z), \tag{6}$$

где $\Phi(\omega)$ — произвольная аналитическая функция, регулярная в точке $\omega = 0$. При этих условиях функции $\Psi(z)$ не имеет, вообще говоря, других особых точек (вплоть до $z = 1$ и $z = \infty$), кроме тех, которые получаются по формуле

$$z = \cos h\,(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_n\alpha_n) = \cos h\left(\sum_i n_i\alpha_i\right), \tag{7}$$

где $\zeta_k = \cos h\alpha_k$ — *особые точки функции* $F(z)$, *а сумма* $\sum_i$ *взята по произвольному конечному множеству индексов* i, *которыми занумерованы особые точки функции* $F(z)$. *Исключение представляют только точки, которые отмечены в теореме Фабера.*

В случае разложений по многочленам Лежандра $\left(\nu = \frac{1}{2}\right)$ эта теорема получает приложение к исследованию аналитических свойств амплитуды рассеяния на втором листе ее римановой поверхности.

Пусть

$$A^{\mathrm{I}}(s, z) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) A_l^1(s) P_l(z) \tag{8}$$

— разложение амплитуды рассеяния на первом листе ее римановой поверхности. Тогда ее разложение на втором листе имеет при соответствующих предположениях, сформулированных в работах [3, 4], следующий вид:

$$A^{\mathrm{II}}(s, z) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \frac{A_l^1(s)}{1 + i \dfrac{g_s}{4\pi \sqrt{s}} A_l^1(s)} P_l(z). \tag{9}$$

Применяя теорему 2, мы сразу получаем основной результат работы [4] об особых точках функции A^{II} (s, z) в плоскости переменной z при фиксированной переменной s. В работе [4] этот результат получен путем аналитического продолжения решения соответствующего интегрального уравнения методом, предложенным Мандельстамом.

Как видно из изложенного, указанный результат является частным случаем более общих теорем, доказанных в теории функций еще в начале XX века.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Faber, Über Reihen nach Legendreschen Polynomen, Jahresber. DMV, XVI, 1907, 109—115.
2. S. Schottlaender, Der Hadamardoche Multiplikationssatz und weitere Kompositionssätze der Funktiontheorie, Math. Nachrichten, 11, № 4/5, 239—294.
3. A. O. Barut, On the Position of singularities of the S-Matrik in «unified theories», Triest Preprint, IC(65)73.
4. W. Zimmerman, Analytic Behavior of the Scattering Amplitude at Zero Energy, Nuovo C., Vol. XXI, № 2, 1961, 249—273.
5. О. С. Парасюк, Мультипликационная теорема Адамара и аналитическое продолжение двухчастичного условия унитарности, ДАН СССР, т. 145, № 6, 1962.

Поступила 1.III 1966 г.
Киев