Асимптотика решения задачи Коши для уравнения с медленно меняющимися коэффициентами

Д. Н. Коноплицкая

Используя методику статьи [1] можно построить асимптотическое разложение для решения следующего уравнения с медленно меняющимися коэффициентами:

$$a_1(\tau)\frac{d^2y}{dt^2}+a_2(\tau)\frac{dy}{dt}+a_3(\tau)\,y=h(\tau)+\varepsilon f\left(\tau, y, \frac{dy}{dt}\right) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Предполагается, что функция f имеет следующий вид:

$$f\left(\tau, y, \frac{dy}{dt}\right) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{l} b_{ij}(\tau)\, y^i \left(\frac{dy}{dt}\right)^j. \tag{3}$$

Коэффициенты $a_k(\tau)$, $b_{ij}(\tau)$ — достаточное число раз дифференцируемы по τ из интервала $0 \leqslant \tau \leqslant L$.

Сделав замену $\tau = \varepsilon t$, перейдем от уравнения (1) и начальных условий (2) к следующему уравнению и условиям:

$$\varepsilon^2 a_1(\tau)\frac{d^2y}{d\tau^2} + \varepsilon a_2(\tau)\frac{dy}{d\tau} + a_3(\tau)\, y = h(\tau) + \varepsilon f\left(\tau, y, \varepsilon\frac{dy}{d\tau}\right), \tag{4}$$

$$y|_{\tau=0} = 0, \qquad \varepsilon\left.\frac{dy}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0. \tag{4'}$$

Назовем (4), (4′) задачей A_ε.

Предположим, что вырождение задачи A_ε в A_0 (A_ε при $\varepsilon = 0$) — регулярное, т. е. число корней с отрицательной вещественной частью характеристического уравнения в точке $\tau = 0$

$$a_{10}\lambda^2 + a_{20}\lambda + a_{30} = 0 \tag{5}$$

совпадает с числом начальных условий, выпадающих при переходе от A_ε к A_0.

В рассматриваемом случае при вырождении задачи A_ε в A_0 выпадают оба начальных условия, поэтому уравнение (5) должно иметь два корня с отрицательной вещественной частью.

При выполнении этого предположения, а также предположений относительно $a_k(\tau)$, $b_{ij}(\tau)$, $f(\tau, y, \frac{dy}{dt})$ имеет место следующее асимптотическое разложение для решения $y(\tau)$ задачи A_ε:

$$y(\tau) = \sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s w_s(\tau) + \sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s v_s(\tau) + R(\tau), \text{ где } R(\tau) = O(\varepsilon^{n+1}) \tag{6}$$

и $\sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s v_s(\tau)$ — представляет асимптотику погранслоя.

Приведем схему доказательства формулы (6).

Аналогично [2], потребуем, чтобы

$$M_\varepsilon \overline{w}_n = O(\varepsilon^{n+1}), \tag{7}$$

где

$$M_\varepsilon \overline{w}_n = \varepsilon^2 a_1(\tau)\frac{d^2\overline{w}_n}{d\tau^2} + \varepsilon a_2(\tau)\frac{d\overline{w}_n}{d\tau} + a_3(\tau)\,\overline{w}_n - h(\tau) - \varepsilon f\left(\tau, \overline{w}_n, \varepsilon\frac{d\overline{w}_n}{d\tau}\right),$$

$$\overline{w}_n = \sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s w_s(\tau). \tag{8}$$

Разлагая $f\left(\tau, \overline{w}_n, \varepsilon\frac{d\overline{w}_n}{d\tau}\right)$ в точке $(\tau, w_0(\tau), 0)$ по степеням ε, подставляя в (7) и приравнивая члены с одинаковыми степенями ε, получаем для определения $w_i(\tau)$ следующие рекуррентные соотношения:

$$a_3(\tau)w_0 - h(\tau) = 0,$$

$$a_2(\tau)\frac{dw_0}{d\tau} + a_3(\tau)w_1 - f(\tau, w_0, 0) = 0,$$

$$a_1(\tau)\frac{d^2w_0}{d\tau^2} + a_2(\tau)\frac{dw_1}{d\tau} + a_3w_2 - \frac{\partial f}{\partial \overline{w}_n}w_1 - \frac{\partial f}{\partial(\varepsilon w_n')}\cdot\frac{dw_0}{d\tau} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

из которых следует, что $w_i(\tau) = \frac{1}{a_3(\tau)}\Phi_i\left(\tau, w_0, \ldots, w_{i-1}, \frac{dw_0}{d\tau}, \ldots, \frac{dw_{i-1}}{d\tau}\right)$.

Для нахождения асимптотики погранслоя исходим из уравнения

$$M_\varepsilon(\overline{v}_n + \overline{w}_n) - M_\varepsilon(\overline{w}_n) = O(\varepsilon^{n+1}), \tag{9}$$

где $\overline{v}_n = \sum_{s=0}^{n}\varepsilon^s v_s(\tau)$.

Из (9), в силу (7), вытекает

$$M_\varepsilon(\overline{v}_n + \overline{w}_n) = O(\varepsilon^{n+1}). \tag{10}$$

Возвратимся к переменной t, разложим $a_k(\varepsilon t)$, $b_{ij}(\varepsilon t)$, $\overline{w}_n(\varepsilon t)$ в окрестности точки $t = 0$:

$$\begin{aligned} a_k(\varepsilon t) &= a_{k0} + \sum_{s=1}^{n} a_{k,s,0}\varepsilon^s t^s + O(\varepsilon^{n+1}),\\ b_{ij}(\varepsilon t) &= b_{ij0} + \sum_{s=1}^{n} b_{ij,s,0}\varepsilon^s t^s + O(\varepsilon^{n+1}), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\overline{w}_n(\varepsilon t) = w_{00} + \sum_{s=1}^{n}\varepsilon^s p_s(t) + O(\varepsilon^{n+1}), \tag{11'}$$

где $p_s(t)$ — многочлены по t. Затем в записанное в раскрытом виде уравнение (10):

$$a_1(\varepsilon t)\frac{d^2\overline{v}_n}{dt^2} + a_2(\varepsilon t)\frac{d\overline{v}_n}{dt} + a_3(\varepsilon t)\overline{v}_n = \varepsilon\left[f\left(\tau, \overline{v}_n + \overline{w}_n, \frac{d(\overline{v}_n + \overline{w}_n)}{dt}\right) - f\left(\tau, \overline{w}_n, \frac{d\overline{w}_n}{dt}\right)\right] + O(\varepsilon^{n+1}) \tag{12}$$

подставляем (11), (11'). Учитывая (3) получим соотношения для определения $v_i(t)$:

$$\begin{aligned} a_{10}\frac{d^2v_0}{dt^2} + a_{20}\frac{dv_0}{dt} + a_{30}v_0 &= 0,\\ a_{10}\frac{d^2v_i}{dt^2} + a_{20}\frac{dv_i}{dt} + a_{30}v_i &= F_i(t, v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}) \end{aligned} \tag{13}$$

при начальных условиях

$$(v_i + w_i)\big|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{d(v_i + w_i)}{dt}\right|_{t=0} = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{14}$$

Из (13) v_i получаем в виде стандартных функций погранслоя.

Перейдем к оценке $R(\tau)$ в формуле (6).

Пусть $y_1 = y - R$, тогда

$$M_\varepsilon y - M_\varepsilon y_1 = O(\varepsilon^{n+1}), \tag{15}$$

т. е.

$$\varepsilon^2 a_1(\tau)\frac{d^2R}{d\tau^2} + \varepsilon a_2(\tau)\frac{dR}{d\tau} + a_3(\tau)R = \varepsilon\left[f\left(\tau, y, \varepsilon\frac{dy}{d\tau}\right) - \right.$$

$$\left. - f\left(\tau, y - R, \varepsilon\frac{d(y-R)}{d\tau}\right)\right] + O(\varepsilon^{n+1}) \tag{16}$$

Предположим, что ξ — точка, в которой $|R(\tau)|$ достигает максимума, Тогда, учитывая, что

$$f\left(\tau, y, \varepsilon\frac{dy}{d\tau}\right) - f\left(\tau, y-R, \varepsilon\frac{d(y-R)}{d\tau}\right) = \frac{\partial f(\tau, \bar{y}, \varepsilon\bar{y}')}{\partial y}R + \frac{\partial f(\tau, \bar{y}, \varepsilon\bar{y}')}{dy'}\frac{dR}{d\tau},$$

где $\bar{y} = y - \Theta R$, $\bar{y}' = \frac{dy}{d\tau} - \Theta\frac{dR}{d\tau}$, $0 < \Theta < 1$, и то, что $\left.\frac{dR}{d\tau}\right|_{\tau=\xi} = 0$, получим

$$\varepsilon^2 a_1(\xi)\frac{d^2R(\xi)}{d\tau^2} + \left(a_3(\xi) - \varepsilon\frac{\partial f}{\partial y}\right)R(\xi) = O(\varepsilon^{n+1}), \tag{17}$$

из которого следует, что

$$\left(a_3(\xi) - \varepsilon\frac{\partial f}{\partial y}\right)R(\xi) = O(\varepsilon^{n+1}). \tag{18}$$

Так как $a_3(\xi) - \varepsilon\frac{\partial f}{\partial y} = O(1)$, то $R(\xi) = O(\varepsilon^{n+1})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМН, т. XII, вып. 5, 1957.
2. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, Об асимптотике решения краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений, ДАН СССР, т. 121, № 5, 1958.

Поступила 2.XI 1966 г.
Киев