Одна предельная теорема для интеграла с периодическим ядром от броуновского процесса

Г. Н. Сытая

В данной работе рассматриваются достаточные условия сходимости при $T \to \infty$ распределения определенного вида функционалов:

$$\alpha_T = \frac{1}{2T} \int_0^T \int_0^T f(w(t), w(s))\, dt ds$$

от процесса броуновского движения $w(t)$.

Полученный результат состоит в следующем:

Теорема. *Пусть функция $f(x, y)$, заданная в квадрате $I = \{-\pi \leqslant x \leqslant \pi; -\pi \leqslant y \leqslant \pi\}$, периодически продолжена по каждой из переменных на всю плоскость. Предположим, что $f(x, y)$ абсолютно интегрируема по Риману в I и*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\, dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\, dy = 0.$$

Тогда существует

$$\lim_{T \to \infty} M \exp\{iz\alpha_T\} = M \exp\{iz\alpha\}$$

и
$$\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t, s)\, dw(t)\, dw(s), \tag{1}$$

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(u, v)\, du dv. \tag{2}$$

Докажем сначала несколько предварительных результатов. В дальнейшем нам понадобится следующий частный случай теоремы 2 [1], который выделим здесь в виде отдельной леммы.

Л е м м а 1. *Пусть* $\Lambda(x)$ — *одна из первообразных функции* $2\lambda(x)$. *Если*

(А)
$$\varepsilon(x) = 2\int_0^x \Lambda^2(z)\, dz = |x|\, \psi(x),$$

где $\psi(x)$ *ограничена и имеет* $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = -\lim\limits_{x\to-\infty} \psi(x) = a \neq 0$;

(Б)
$$\left| \int_0^x \Lambda(z)\, dz \right| \leqslant L < \infty,$$

то

$$\lim_{T\to\infty} M \exp\left\{iz \sqrt{\frac{2}{aT}} \int_0^T \lambda(w(t))\, dt\right\} = \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}.$$

Л е м м а 2. *Совместное распределение случайных величин* $\{\xi_T^{(k)}, \eta_T^{(k)}, k = 1, 2, \ldots, N\}$, *где*

$$\xi_T^{(k)} = \frac{k}{\sqrt{2T}} \int_0^T \sin kw(t)\, dt,$$

$$\eta_T^{(k)} = \frac{k}{\sqrt{2T}} \int_0^T \cos kw(t)\, dt,$$

при $T \to \infty$ *сходится к совместному распределению* $2N$ *случайных величин, независимых в совокупности и нормальных с параметрами* (0; 1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$\beta_T^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} [\nu_k^{(1)} \xi_T^{(k)} + \nu_k^{(2)} \eta_T^{(k)}] = \frac{1}{\sqrt{2T}} \int_0^T \varphi_N(w(t))\, dt$$

и выберем первообразную функции

$$2\varphi_N(x) = 2 \sum_{k=1}^{N} k\, [\nu_k^{(1)} \sin kx + \nu_k^{(2)} \cos kx],$$

равной

$$\Phi_N(x) = 2 \sum_{k=1}^{N} [-\nu_k^{(1)} \cos kx + \nu_k^{(2)} \sin kx].$$

Тогда

$$\text{(А)} \qquad \varepsilon_N(x) = 2\int_0^x \Phi_N^2(z)\,dz = |x|\cdot 4\,\mathrm{sgn}\,x\left\{\sum_{k=1}^{N}[(\nu_k^{(1)})^2+(\nu_k^{(2)})^2]+\frac{\mu(x)}{x}\right\},$$

причем $|\mu(x)| \leqslant \mu < \infty$ и

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{\varepsilon_N(x)}{x} = 4\sum_{k=1}^{N}[(\nu_k^{(1)})^2+(\nu_k^{(2)})^2] \neq 0,$$

если $\varphi_N(x)\neq 0$ (для $\varphi_N(x)\equiv 0$ утверждение леммы выполнено тривиально)

$$\text{(Б)} \qquad \left|\int_0^x \Phi_N(z)\,dz\right| = \left|2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}[\nu_k^{(1)}\sin kx+\nu_k^{(2)}(1-\cos kx)]\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}[\,|\nu_k^{(1)}|+|\nu_k^{(2)}|\,].$$

Следовательно, по лемме 1

$$\lim_{T\to\infty} M\exp\left\{iz\sqrt{\frac{2}{4T\sum\limits_{k=1}^{N}[(\nu_k^{(1)})^2+(\nu_k^{(2)})^2]}}\int_0^T\varphi_N(w(t))\,dt\right\} = \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

Последнее соотношение, очевидно, эквивалентно следующему:

$$\lim_{T\to\infty} M\exp\{iz\beta_T^{(N)}\} = \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\sum_{k=1}^{N}[(\nu_k^{(1)})^2+(\nu_k^{(2)})^2]\right\}. \qquad (3$$

Пусть теперь $\{\omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)},\ k=1,2,\ldots,N\}$ — независимые в совокупнос ти нормальные (0; 1) величины, тогда из (3) при $z=1$ получим:

$$\lim_{T\to\infty} M\exp\{i\sum_{k=1}^{N}[\nu_k^{(1)}\xi_T^{(k)}+\nu_k^{(2)}\eta_T^{(k)}]\} = M\exp\{i\sum_{k=1}^{N}[\nu_k^{(1)}\omega_k^{(1)}+\nu_k^{(2)}\omega_k^{(2)}]\},$$

что и доказывает лемму.

Из доказанной леммы вытекает такой результат. Рассмотрим функ ционал

$$\alpha_T^{(N)} = \frac{1}{2T}\int_0^T\int_0^T f_N(w(t), w(s))\,dt\,ds, \qquad (4$$

где

$$f_N(x, y) = \sum_{k,m=1}^{N}\{a_{km}^{(1)}\sin kx\sin my + a_{km}^{(2)}\sin kx\cos my + a_{km}^{(3)}\cos kx\sin my +$$

$$+ a_{km}^{(4)}\cos kx\cos my\} \qquad ($$

($a_{km}^{(i)}$ — некоторые постоянные). Заметим, что совместное распределен

$\{\omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)},\ k=1,2,\ldots,N\}$ совпадает с совместным распределением $\{\omega_k^{(1)}, -\omega_k^{(2)},\ k=1,2,\ldots,N\}$, а потому на основании леммы 2

$$\lim_{T\to\infty} M\exp(iz\alpha_T^{(N)}) = M\exp(iz\alpha^{(N)}), \tag{6}$$

где

$$\alpha^{(N)} = \sum_{k,m=1}^{N}\left\{\frac{a_{km}^{(1)}}{k\cdot m}\omega_k^{(1)}\omega_m^{(1)} - \frac{a_{km}^{(2)}}{k\cdot m}\omega_k^{(1)}\omega_m^{(2)} - \frac{a_{km}^{(3)}}{k\cdot m}\omega_k^{(2)}\omega_m^{(1)} + \frac{a_{km}^{(4)}}{k\cdot m}\omega_k^{(2)}\omega_m^{(2)}\right\}. \tag{7}$$

Так как $\alpha^{(N)}$ представляет собой квадратичную форму относительно величин $\omega_k^{(i)}$, то, приведя ее к каноническому виду, получим:

$$\alpha^{(N)} = \sum_{k=1}^{2N}\lambda_k\omega_k^2, \quad (\omega_{2k-1} = \omega_k^{(1)}, \quad \omega_{2k} = \omega_k^{(2)}).$$

Следовательно,

$$M\exp(iz\alpha^{(N)}) = M\exp\left(iz\sum_{k=1}^{2N}\lambda_k\omega_k^2\right) = \prod_{k=1}^{2N} M\exp(iz\lambda_k\omega_k^2) =$$

$$= \prod_{k=1}^{2N}\frac{1}{\sqrt{1-2iz\lambda_k}}. \tag{8}$$

Лемма 3. *Если в формуле* (5) $a_{km}^{(1)}$ — *коэффициенты Фурье абсолютно интегрируемой функции* $f(x,y)$:

$$a_{km}^{(1)} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\sin kx\sin my\,dx\,dy,$$

$$a_{km}^{(2)} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\sin kx\cos my\,dx\,dy,$$

$$a_{km}^{(3)} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\cos kx\sin my\,dx\,dy,$$

$$a_{km}^{(4)} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\cos kx\cos my\,dx\,dy,$$

а случайная величина α *определена в* (1) *и* (2) *с той же* $f(x,y)$, *то*

$$\lim_{N\to\infty} M\exp\{iz\alpha^{(N)}\} = M\exp\{iz\alpha\}. \tag{9}$$

Доказательство. Так как функция $F(x,y)$ (см. (2)) ограничена $\left(|F(x,y)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(u,v)|\,du\,dv\right)$ и разлагается в равномерно сходящийся ряд:

$$F(x,y) = \sum_{k,m=1}^{\infty}\left\{\frac{a_{km}^{(1)}}{k\cdot m}\cos kx\cos my - \frac{a_{km}^{(2)}}{k\cdot m}\cos kx\sin my -\right.$$

$$-\frac{a_{km}^{(3)}}{k\cdot m}\sin kx\cos my+\frac{a_{km}^{(4)}}{k\cdot m}\sin kx\sin my\Big\},$$

то, если $F_N(x, y)$ представляется отрезком $\sum\limits_{k,m=1}^{N}$ этого ряда, из [3] имеем, что

$$\alpha=\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\psi_N, \tag{10}$$

$$\psi_N=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F_N(t, s)\,dw(t)\,dw(s),$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\omega_k^{(1)}&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,dw(t),\\ \omega_k^{(2)}&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kt\,dw(t).\end{aligned}\tag{11}$$

Тогда ψ_N также можно записать в виде правой части (7), но так как $\omega_k^{(i)}$, определенные формулами (11), нормальны (0; 1) и некоррелированы, то $\alpha^{(N)}$ и ψ_N распределены одинаково. Утверждение леммы следует теперь из (10).

З а м е ч а н и е. Из (8) и (9) вытекает, что

$$M\exp(iz\alpha)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1-2iz\lambda_k}},$$

λ_k — коэффициенты канонического вида квадратичной формы

$$\sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot m}\{a_{km}^{(1)}\xi_{2k}\xi_{2m}-a_{km}^{(2)}\xi_{2k}\xi_{2m-1}-a_{km}^{(3)}\xi_{2k-1}\xi_{2m}+a_{km}^{(4)}\xi_{2k-1}\xi_{2m-1}\}.$$

Л е м м а 4. *Пусть* $\alpha_T^{(N)}$ (4) *и* $f_N(x, y)$ (5) *построены с помощью коэффициентов* $a_{km}^{(i)}$ *разложения* $f(x, y)$ *в ряд Фурье. Тогда равномерно по* T *существует*

$$\lim_{N\to\infty}M\exp(iz\alpha_T^{(N)})=M\exp(iz\alpha_T). \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\alpha_T^{(N)}$ представляет собой сумму повторных интегралов, каждый из которых распадается в произведение интегралов, то, используя формулу Ито [2], нетрудно получить, что

$$\alpha_T^{(N)}=\frac{2}{T}\int\limits_0^{w(T)}\int\limits_0^{w(T)}F_N(x, y)\,dxdy-\frac{2}{T}\int\limits_0^{T}\int\limits_0^{w(T)}[F_N(x, w(t))+$$

$$+F_N(w(t), x)]\,dxdw(t)+\frac{2}{T}\int\limits_0^{T}\int\limits_0^{T}F_N(w(t), w(s))\,dw(t)\,dw(s). \tag{13}$$

а). $F_N(x, y)$ равномерно по (x, y) сходится к $F(x, y)$ при $N \to \infty$, следовательно, начиная с некоторого N $|F_N(x, y) - F(x, y)| < \varepsilon$. Отсюда

$$M \left| \frac{2}{T} \int\limits_0^{w(T)} \int\limits_0^{w(T)} [F_N(x, y) - F(x, y)]\, dxdy \right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{T} M w(T)^2 = 2\varepsilon. \qquad (14)$$

б). Выберем так N, чтобы $|F_{N+p}(x, y) - F_N(x, y)| < \varepsilon$, тогда (см. [3])

$$M \left\{ \frac{2}{T} \int\limits_0^T \int\limits_0^T [F_{N+p}(w(t), w(s)) - F_N(w(t), w(s))]\, dw(t)\, dw(s) \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{T^2} T^2 \varkappa_2 \varepsilon^2 = 4\varkappa_2\varepsilon^2 \quad (\varkappa_2 = \mathrm{const}). \qquad (15)$$

в). Рассмотрим величину

$$\varphi_N(T) = \frac{2}{T} \sum_{k,m=1}^{N} \frac{a_{km}^{(1)}}{km} \frac{1 - \cos kw(T)}{k} \int\limits_0^T \cos mw(s)\, dw(s).$$

$$M|\varphi_{N+p}(T) - \varphi_N(T)| \leqslant \frac{2}{T} \left\{ \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{m^2k^4} \int\limits_0^T M \cos^2 mw(s)\, ds} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2k^4} \int\limits_0^T M \cos^2 mw(s)\, ds} \right\} \cdot \sqrt{\sum_{k,m=1}^{\infty} (a_{km}^{(1)})^2} = \frac{\varepsilon_N}{\sqrt{T}}, \qquad (16)$$

где $\varepsilon_N \to 0$ при $N \to \infty$ независимо от T.

Воспользовавшись явным видом $F_N(x, y)$, из оценок типа (16) заключаем, что существует равномерно по T

$$\operatorname*{p\,lim}_{N\to\infty} \frac{2}{T} \int\limits_0^T \int\limits_0^{w(T)} [F_N(x, w(t)) + F_N(w(t), x)]\, dxdw(t). \qquad (17)$$

Согласно (13) и равномерности по T соотношений (14) — (16), из (14), (15) и (17) заключаем, что существует равномерно по T $\operatorname*{p\,lim}_{N\to\infty} \alpha_T^{(N)}$. Равенство $\operatorname*{p\,lim}_{N\to\infty} \alpha_T^{(N)} = \alpha_T$ доказано в [3]. (Можно обосновать справедливость формулы (12) в [3] не только для непрерывной, но и для произвольной интегрируемой по Риману функции $f''_{xy}(x, y)$).

Лемма доказана.

Ввиду леммы 4 утверждение теоремы является следствием соотношений (6), (9) и (12).

В заключение выражаю глубокую благодарность А. В. Скороходу за постановку задачи и помощь при ее решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Скороход, Н. П. Слободенюк, Об асимптотическом поведении некоторых функционалов от процесса броуновского движения, УМЖ, т. XVIII, № 4, 1966.
2. К. Ито, О стохастических дифференциальных уравнениях, Сб. переводов, Математика, 1 : 1, 1957.
3. Г. Н. Сытая, Об одном кратном стохастическом интеграле, УМЖ, т. XVI, № 3, 1964.

Поступила 8.VIII 1966 г.
Институт математики АН УССР