Эргодическая теорема для марковских процессов с дискретным вмешательством случая

В. В. Баклан

Пусть $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ — последовательность положительных случайных величин с одной и той же функцией распределения $F(t)$, а $\xi(t)$ — однородный марковский процесс в фазовом пространстве $(H, \mathfrak{B})$ (H — некоторое множество, $\mathfrak{B}$ — система измеримых подмножеств H) с вероятностями перехода $P_t(x, A)$ $(x \in H, A \in \mathfrak{B})$.

Предположим, что на интервале времени (t_{n-1}, t_n) $\xi(t)$ эволюционирует в соответствии со своими вероятностями перехода $P_t(x, A)$, а в момент времени t_n совершает скачок из точки $\xi(t_n)$ в множество A с вероятностью $q(\xi(t_n), A)$. Такие моменты будем называть моментами регенерации.

Обозначим через $P'_t(x, A)$ вероятность того, что в момент времени t процесс попадает в A, если начальный момент был моментом регенерации, и процесс попал в точку x.

В данной работе доказывается, что существует предел $P'_t(x, A)$ при $t \to \infty$, и находится значение этого предела.

Наряду с марковским процессом $\xi(t)$ рассмотрим в том же фазовом пространстве цепь Маркова с дискретным временем, переходные вероятности которой за один шаг равны

$$\varphi(x, A) = \int_0^\infty dF(u) \int q(y, A) P_u(x, dy).$$

Предположим, что эта цепь обладает следующими свойствами:

1) уравнение

$$\int a(y)\varphi(x, dy) = a(x)$$

имеет единственное решение

$$a(x) = \text{const};$$

2) существует единственное стационарное распределение $\Phi(A)$.

Теорема. *Если выполнены условия* 1) — 2) *и*

$$\int_0^\infty u^2 dF(u) < \infty,$$

то равномерно по $x \in H$

$$P'_t(x, A) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{\int_0^\infty [1 - F(u)] \int P_u(x, A)\Phi(dx)\, du}{\int_0^\infty u dF(u)}.$$

Доказательство. Легко видеть, что функция $P_t'(x, A)$ удовлетворяет уравнению

$$P_t'(x, A) = [1 - F(t)]\, P_t(x, A) + \\ + \int_0^t \int\int P_{t-u}'(y, A)\, q(z, dy)\, P_u(x, dz)\, dF(u). \tag{1}$$

Обозначим через $\widetilde{P}_s(x, A)$ преобразование Лапласа функции $P_t'(x, A)$:

$$\widetilde{P}_s(x, A) = \int_0^\infty e^{-su} P_u'(x, A)\, du.$$

На основании (1) для $\widetilde{P}_s(x, A)$ получим уравнение

$$\widetilde{P}_s(x, A) = \int_0^\infty [1 - F(t)]\, P_t(x, A)\, e^{-st} dt + \\ + \int_0^\infty \int\int \widetilde{P}_s(y, A)\, q(z, dy)\, P_t(x, dz)\, e^{-st}\, dF(t). \tag{2}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что для $\widetilde{P}_s(x, A)$ выполняется соотношение (см., например, [1])

$$\widetilde{P}_s(x, A) = \frac{1}{s} P(A) + o\left(\frac{1}{s}\right). \tag{3}$$

Предполагая (3) выполненным, найдем сначала $P(A)$. Умножив обе части уравнения (2) на s и формально перейдя к пределу, получим уравнение для $P(x, A) = \lim\limits_{s\to 0} s\widetilde{P}_s(x, A)$:

$$P(x, A) = \int_0^\infty \int \int P(y, A)\, q(z, dy)\, P_u(x, dz)\, dF(u) = \int P(y, A)\, \varphi(x, dy).$$

В силу условия 1) $P(x, A)$ не зависит от x: $P(x, A) = P(A)$. Для определения $P(A)$ рассмотрим уравнение для разности $R_s(x, A) = \widetilde{P}_s(x, A) - \frac{1}{s} P(A)$.

$$R_s(x, A) = \int_0^\infty e^{-st} [1 - F(t)]\, P_t(x, A)\, dt + \frac{1}{s} \int_0^\infty (e^{-su} - 1)\, dF(u)\, P(A) + \\ + \int_0^\infty \int \int e^{-su} R_s(y, A)\, q(z, dy)\, P_u(x, dz)\, dF(u). \tag{4}$$

Предполагая, что существует $\lim\limits_{s\to 0} R_s(x, A) = R(x, A)$, и переходя в полученном уравнении к пределу получим

$$R(x, A) = \int_0^\infty [1 - F(u)]\, P_u(x, A)\, du - \\ - P(A) \int_0^\infty u dF(u) + \int R(y, A)\, \varphi(x, dy). \tag{5}$$

Проинтегрировав обе части равенства (5) по мере $\Phi(dx)$ и приняв во внимание условие 2), получим:

$$P(A)\int_0^\infty u\,dF(u) = \int_0^\infty [1-F(u)]\int P_u(x, A)\,\Phi(dx)\,du.$$

Отсюда

$$P(A) = \frac{\int_0^\infty [1-F(u)]\int P_u(x, A)\,\Phi(dx)\,du}{\int_0^\infty u\,dF(u)}.$$

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что

$$s\sup_x |\widetilde{P}_s(x, A) - \frac{1}{s}P(A) - R(x, A)| \xrightarrow[s\to 0]{} 0.$$

Из уравнений (4) и (5) получим:

$$R_s(x, A) - R(x, A) = \int_0^\infty (e^{-su}-1)[1-F(u)]P_u(x, A)\,du +$$

$$+\int_0^\infty \frac{e^{-su}-1+su}{s}\,dF(u)\,P(A) +$$

$$+\int_0^\infty (e^{-su}-1)\,dF(u)\int\int R(y, A)\,q(z, dy)\,P_u(x, dz) +$$

$$+\int_0^\infty dF(u)\int\int e^{-su}[R_s(x, A)-R(x, A)]\,q(z, dx)\,P_u(x, dz). \qquad (6)$$

Проведем оценку слагаемых в правой части последнего уравнения:

$$\left|\int_0^\infty (e^{-su}-1)[1-F(u)]P_u(x, A)\,du\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty |e^{-su}-1|\,[1-F(u)]\,du \leqslant s\int_0^\infty u[1-F(u)]\,du = s\alpha_1;$$

$$\left|\int_0^\infty \frac{e^{-su}-1+su}{s}\,dF(u)\,P(A)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \left|\frac{e^{-su}-1+su}{s}\right| dF(u) \leqslant \frac{1}{2}s\int_0^\infty u^2\,dF(u) = s\alpha_2.$$

Чтобы оценить третье слагаемое, нам понадобится оценка $|R(y, A)|$. Функция $R(y, A)$, удовлетворяющая уравнению (5), может быть представлена в виде

$$R(y, A) = a + b(y),$$

где a — общее решение однородного уравнения (в силу условия 2) оно не зависит от y), а $b(y)$—некоторое частное решение неоднородного уравнения. Легко видеть, что в качестве $b(y)$ можно взять функцию

$$b(y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{M_y\int_0^\infty[1-F(u)]\,P_u(\xi_k,A)\,du-M\int_0^\infty[1-F(u)]\,P_u(\xi_k,A)\,du\right\}$$

(здесь ξ_k — значения цепи Маркова в момент k, $M_y f(\xi_k)=M\{f(\xi k)/_{\xi_0=y}\}$, $Mf(\xi_k)$ — математическое ожидание, взятое по стационарному распределению).

Так как функция $f(x)=\int_0^\infty[1-F(u)]\,P_u(x,A)\,du$ ограничена, то найдутся такие постоянные K и $0<\varrho<1$, что

$$|M_y f(\xi_k)-Mf(\xi_k)|\leqslant K\varrho^k$$

([2], гл. 5), поэтому $|R(y,A)|\leqslant\alpha$. Тогда

$$\left|\int_0^\infty(e^{-su}-1)\,F(du)\int\int R(y,A)\,q(z,dy)\,P_u(x,dz)\right|\leqslant s\alpha\int_0^\infty uF(du)=s\alpha_3.$$

Последнее слагаемое в равенстве (6) можно оценить так:

$$\left|\int_0^\infty\int\int e^{-su}[R_s(y,A)-R(y,A)]\,q(z,dy)\,P_u(x,dz)\,dF(u)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_x|R_s(x,A)-R(x,A)|\int_0^\infty e^{-su}dF(u)\leqslant$$

$$\leqslant\sup_x|R_s(x,A)-R(x,A)|\left[1-s\int_0^\infty uF(du)+\frac{1}{2}s^2\int_0^\infty u^2F(du)\right];$$

таким образом, при достаточно малом s

$$\sup_x|R_s(x,A)-R(x,A)|\leqslant\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{\int_0^\infty uF(du)-\frac{1}{2}s\int_0^\infty u^2F(du)}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Деч, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, изд-во «Наука», М., 1965.
2. Дж. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.

Поступила 11.I 1966 г.

Киевский гос. университет
им. Т. Г. Шевченко