О воздействии малого периодического возмущения на нелинейные системы, имеющие вращательные движения

А. Я. Гадионенко

Исследование существенно нелинейных систем, близких к точно интегрирующимся, проводилось в работах Ю. А. Митропольского [1], В. М. Волосова [2], Ф. Л. Черноусько [3]. В этих работах изучалось воздействие малой возмущающей силы на системы, имеющие колебательные или вращательные движения.

Н. Н. Моисеевым [4] указан метод нахождения приближенного решения дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(\tau,x) = \varepsilon F(t,x,\dot{x}) \tag{1}$$

в случае больших начальных энергий. В этом случае строятся периодические решения 2-го рода порождающего уравнения в виде ряда по отрицательным степеням корня из энергии. Возмущенная система приводится к системе в стандартной форме и усредняется. Методы исследования усредненной системы известны.

Отметим, что результаты [1—4] применимы для исследования систем, близких к консервативным.

Для исследования систем второго порядка вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x,\dot{x}) = \varepsilon F(t) \tag{2}$$

требуется выяснить вопрос о возможных видах решений порождающего уравнения. В [5] приведены условия существования периодических решений 2-го рода порождающего уравнения системы (2).

В настоящей статье рассматривается вопрос построения периодических решений 2-го рода системы (2) при следующих предположениях: $f(x, \dot{x})$ — периодическая функция x периода T и аналитическая по x, $\dot{x}$; $F(t)$ — периодическая функция с периодом, соизмеримым с T; ε — малый параметр.

Предположим, что для порождающей системы

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x,\dot{x}) = 0 \tag{3}$$

известно периодическое решение 2-го рода

$$x(t,\mu) = \nu t + \mu + \varphi(\nu t + \mu) = \psi + \varphi(\psi) = x(\psi), \tag{4}$$

где $\varphi(\psi)$ — периодическая функция. Тогда, очевидно,

$$x(t+\tau,\mu) = \nu t + \nu\tau + \mu + \varphi(\nu t + \nu\tau + \mu) = \nu t + \mu(\tau) + \varphi(\nu t + \mu(\tau))$$

является однопараметрическим семейством решений. При воздействии на систему периодической возмущающей силы, однопараметрическое семейство невозмущенной системы порождает некоторое решение. Это решение ищем в виде

$$x = x(\psi), \tag{5}$$

причем ψ рассматриваем как новую искомую функцию, вводимую вместо x.

Дифференцируя (5) и подставляя результат в (2), получим уравнение для искомой функции ψ:

$$x'_{\psi}\frac{d^2\psi}{dt^2} + x_{\psi\psi}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + f\left(x, x'_{\psi}\frac{d\psi}{dt}\right) = \varepsilon F(t). \tag{6}$$

Учитывая тождество

$$\nu^2 x''_{\psi\psi} + f(x, \nu x'_{\psi}) = 0, \tag{7}$$

уравнение (6) приводим к следующему уравнению

$$x'_{\psi} \frac{d^2\psi}{dt^2} + x''_{\psi\psi}\left[\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - \nu^2\right] + f\left(x, x'_{\psi}\frac{d\psi}{dt}\right) - f(x, \nu x'_{\psi}) = \varepsilon F(t). \tag{8}$$

Для нахождения периодического решения 2-го рода системы (2) искомую функцию ψ находим из уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = \nu + \varepsilon z(t, \mu), \tag{9}$$

где $z(t, \mu)$ — периодическая функция. Для определения $z(t, \mu)$, подставив (9) в (8), получим следующее уравнение первого порядка

$$x'_{\psi}\frac{dz}{dt} + (2\nu x''_{\psi\psi} + f'_{\dot{x}}\, x'_{\psi})\, z = F(t) - \varepsilon\left(x''_{\psi\psi} + \frac{1}{2} f''_{\dot{x}\dot{x}}\, x'^2_{\psi}\right) z^2 - \varepsilon^2 \ldots \tag{10}$$

При выполнении условия $\bar{z} = 0$ ($\bar{z}$ — интегральное среднее функции $z(t, \mu)$ за период) для нахождения ψ с точностью до порядка ε мы можем пренебречь в уравнении (10) членами порядка ε, при этом погрешность в определении $\frac{d\psi}{dt}$ приводит к ошибке порядка ε^2, и на интервале времени $t \sim \frac{1}{\varepsilon}$ погрешность в определении ψ будет величиной порядка ε.

Поэтому, при выполнении условия

$$\overline{z(t, \mu)} = 0, \tag{11}$$

для нахождения ψ с точностью до величин порядка ε $z(t, \mu)$ находим из уравнения (10), в котором пренебрегаем членами порядка ε, т. е. из уравнения

$$\frac{dz}{dt} + p(t, \mu)\, z = q(t, \mu), \tag{12}$$

где

$$p(t, \mu) = \frac{2\nu x''_{\psi\psi} + f'_{\dot{x}}\, x'_{\psi}}{x'_{\psi}},$$

$$q(t, \mu) = \frac{F(t)}{x'_{\psi}}$$

— непрерывные периодические функции (в силу свойств вращательных движений [5]), в которых полагаем, не уменьшая порядка точности по ε, $\psi = \nu t + \mu$. Уравнение (12) имеет периодическое решение при выполнении условия

$$\overline{p(t, \mu)} \neq 0;$$

если же

$$\overline{p(t, \mu)} = 0,$$

то периодическое решение уравнения (12) существует при выполнении условия

$$\int_0^T q(t, \mu)\, e^{\int_\tau^t p(t, \mu)\, dt}\, dt = 0.$$

Периодическое решение $z(t, \mu)$ уравнения (12) зависит от параметра μ. Поэтому условие (11) можно рассматривать как уравнение с неизвестным μ. Корни уравнения (11) определяют те значения параметра μ, при которых существует периодическое решение уравнения (12) с равным нулю средним значением. Поэтому, если уравнение (11) имеет хотя бы один действительный корень, то в первом приближении получаем следующее выражение для ψ:

$$\psi = \nu t + \mu + \varepsilon \int_{\tau}^{t} z(t,\mu)\,dt. \tag{13}$$

Таким образом, исходя из первого приближения видим, что *однопараметрическое семейство вращательных движений невозмущенной системы порождает вращательное движение возмущенной системы с тем же числом вращения, если существуют действительные корни уравнения* (11).

Для нахождения ψ с точностью до величин порядка ε^m на интервале времени $t \sim \frac{1}{\varepsilon}$ $z(t, \mu)$ находим из уравнения (10), в котором сохраняются члены до порядка ε^{m-1} включительно, записываемого в виде

$$\frac{dz}{dt} + p(t,\mu)\,z = q(t,\mu) + \varepsilon q_1\left(t,z,\int z dt,\mu,\varepsilon\right), \tag{14}$$

при выполнении условия

$$\overline{z(t,\mu)} = 0. \tag{15}$$

Покажем, что уравнение (14) имеет периодическое решение. Для этого произведем ряд замен. Заменой

$$z = e^{-\int_{\tau}^{t}\widetilde{p}(t,\mu)dt} z_1, \tag{16}$$

где

$$\widetilde{p}(t,\mu) = p(t,\mu) - \overline{p(t,\mu)}, \quad \overline{p(t,\mu)} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} p(t,\mu)\,dt,$$

уравнение (14) сводится к уравнению

$$\frac{dz_1}{dt} + \overline{p}z_1 = q(t,\mu)\,e^{\int_{\tau}^{t}\widetilde{p}dt} + \varepsilon q_2(t, e^{-\int_{\tau}^{t}\widetilde{p}dt} z_1, \int e^{-\int_{\tau}^{t} p\, dt} z_1 dt, \mu, \varepsilon) \tag{17}$$

и затем заменой

$$z_1 = u + v, \tag{18}$$

где $u(t,\mu)$ — периодическое решение уравнения

$$\frac{du}{dt} + \overline{p}u = q(t,\mu)\,e^{\int_{\tau}^{t}\widetilde{p}dt}, \tag{19}$$

к уравнению

$$\frac{dv}{dt} + \overline{p}v = \varepsilon q_2(t,u,v, \int e^{-\int_{\tau}^{t}\widetilde{p}dt} v dt, \mu, \varepsilon). \tag{20}$$

Так как при $\varepsilon = 0$ тривиальное решение уравнения (20) асимптотически устойчиво для $\overline{p} > 0$, то при малых ε оно имеет периодическое решение [6].

Таким образом, *вопрос существования периодических решений 2-го рода системы* (2) *с числом вращения невозмущенной системы* (3) *сводится к вопросу существования действительных корней уравнения* (15).

На основании указанного выше *процесс построения периодического решения 2-го рода системы* (2) *сводится к нахождению периодического решения 2-го рода невозмущенной системы* (3), *нахождению решений уравнений* (19), (20) *и решения уравнения* (15).

Пример. В [5] для маятника с линейным трением и постоянным вращающим моментом установлено существование вращательного движения при определенных соотношениях между параметрами системы и начальными условиями. Уравнение движения такого маятника при воздействии на него внешней силы $\varepsilon E \sin\omega t$ имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \sin x = \beta + \varepsilon E \sin \omega t, \tag{21}$$

где $\lambda, \beta, E, \varepsilon$ — постоянные, $\varepsilon \ll 1$. Однопараметрическое семейство вращательных движений невозмущенной системы находится в виде

$$x = \nu t + \mu + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n(\nu t + \mu). \tag{22}$$

Для возмущенной системы ψ определяется с точностью до ε из соотношения

$$\psi = \nu t + \mu + \varepsilon \int_{\tau}^{t} z(t, \mu)\, dt, \tag{23}$$

где

$$z(t,\mu) = E[1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n(\nu t + \mu)] \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} [c_n \sin(\omega + n\nu)t + d_n \cos(\omega + n\nu)t];$$

значения b_n, c_n, d_n приведены ниже.

$$b_n = 2na_n$$

$$c_{-n} = \frac{na_n}{2} \frac{1}{\lambda^2 + (\omega - n\nu)^2} [\lambda \cos n\mu - (\omega - n\nu) \sin n\mu]$$

$$c_0 = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}$$

$$c_n = \frac{na_n}{2} \frac{1}{\lambda^2 + (\omega + n\nu)^2} [\lambda \cos n\mu + (\omega + n\nu) \sin n\mu]$$

$$d_{-n} = \frac{na_n}{2} \frac{1}{\lambda^2 + (\omega - n\nu)^2} [\lambda \sin n\mu + (\omega - n\nu) \cos n\mu]$$

$$d_0 = -\frac{\omega}{\lambda^2 + \omega^2}$$

$$d_n = \frac{na_n}{2} \frac{1}{\lambda^2 + (\omega + n\nu)^2} [\lambda \sin n\mu - (\omega + n\nu) \cos n\mu]$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots.$$

При $\omega = 2\nu$ условие (11) записывается в виде следующего уравнения

$$\frac{a_1^2}{\lambda^2 + \nu^2} [\lambda \sin \mu + \nu \cos \mu] \cos \mu + \frac{a_2}{\lambda} \sin 2\mu = 0, \tag{24}$$

имеющего решения

$$\mu_1 = 2\pi n \pm \frac{\pi}{2},$$

$$\mu_2 = \pi n - \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda \nu a_1^2}{(a_1^2 + 2a_2)\lambda^2 + 2a_2\nu^2} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Следовательно, решение системы (21), характеризующее вращательное движение маятника с линейным трением и постоянным вращающим моментом под действием малого периодического возмущения, запишется в виде

$$x = \nu t + \mu^* + \varepsilon \int_\tau^t z(t,\mu^*)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n \left(\nu t + \mu^* + \varepsilon \int_\tau^t z(t,\mu^*)\,dt\right),$$

где μ^* решение уравнения (24).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, изд-во «Наука», М., 1964.
2. В. М. Волосов, Усреднение некоторых возмущенных движений, ДАН СССР, т. 133, № 2, 1960.
3. Ф. Л. Черноусько, О резонансе в существенно нелинейной системе, Ж. выч. матем. и матем. физ., т. 3, № 1, 1963.
4. Н. Н. Моисеев, Асимптотика быстрых вращений, Ж. выч. матем. и матем. физ., т. 3, № 1, 1963.
5. А. Я. Гадионенко, А. М. Самойленко, О вращательных движениях автономных систем второго порядка, Респ. межведомств. сб. «Математическая физика», изд-во «Наукова думка», К., 1967.
6. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958.

Поступила 5.VII 1966 г.
Ин-т матем. АН УССР, Киев