УДК 621.384.63

Об условиях, обеспечивающих оптимальный захват в случае слабой фокусировки

И. Г. Козубовская

В работах [1, 2] получена формула для меры нижней границы области захвата, определяемой пространственным параллелепипедом, движущимся по равновесной траектории в накопителе заряженных частиц. В случае выполнения условий (слабой фокусировки)

$$0 < \langle k_0^2(\sigma)[1-n(\sigma)]\rangle L^2 \ll 1, \quad 0 < \langle k_0^2(\sigma)\, n(\sigma)\rangle L^2 \ll 1; \qquad (1)$$

$$\max L^2 \,|\, k_0^2(\sigma)[1-n(\sigma)] - \langle k_0^2(\sigma)[1-n(\sigma)]\rangle \,| < \langle k_0^2(\sigma)[1-n(\sigma)]\rangle, \qquad (2)$$

$$\max L^2 \,|\, k_0^2(\sigma)\, n(\sigma) - \langle k_0^2(\sigma)\, n(\sigma)\rangle| < \langle k_0^2(\sigma)\, n(\sigma)\rangle,$$

где σ — переменная длина дуги на равновесной траектории, $k_0(\sigma)$ — кривизна нулевой траектории, $n(\sigma)$ — показатель магнитного поля на нулевой траектории, $\langle \ldots \rangle \equiv \frac{1}{L}\int\limits_0^L \ldots d\sigma$,

$$\frac{\langle k_0(\sigma)\rangle}{\langle k_0^2(\sigma)[1-n(\sigma)]\rangle^{\frac{1}{2}}} \ll 1, \tag{3}$$

эта формула приобретает довольно простой вид:

$$V = \frac{\pi^3 a_1^2 a_3^2 a_5^2}{\langle k_0(\sigma)\rangle} \sqrt{-\alpha \frac{W_1}{c\varepsilon_0} \operatorname{tg}\varphi_s \langle k_0^2(\sigma)[1-n(\sigma)]\rangle \langle k_0^2(\sigma) n(\sigma)\rangle^{\frac{1}{2}}}; \tag{4}$$

здесь a_1, a_3, a_5 — соответственно радиальный, фазовый и вертикальный размеры пространственного параллелепипеда, c — скорость света, ε_0 — энергия частицы, $\alpha = \frac{2\pi l}{L}$ (l — целое число — кратность высокочастотного поля), W_1 — мощность высокочастотного подпитывающего поля, φ_s — равновесная фаза.

Равновесная фаза φ_s определяется из выражения

$$W_1 = cqE_0 \cos\varphi_s \tag{5}$$

(q — заряд частицы, E_0 — амплитуда высокочастотной электромагнитной волны). Величина

$$W_1 = \frac{2}{3} q^2 c \left(\frac{\varepsilon_0}{m_0 c^2}\right)^4 \langle k_0^2(\sigma)\rangle \tag{6}$$

характеризует потери на излучение. Для тяжелых частиц это излучение мало́ в силу обратной пропорциональности его m_0^4. Но амплитуда E_0 при этом необязательно будет малой, так как в этом случае может быть $\varphi_s \simeq -\frac{\pi}{2}$. Знак минус здесь выбран из следующих соображений. Мощность $W_1 > 0$, $qE_0 > 0$. Тогда, согласно формуле (5), $\cos\varphi_s > 0$. В этом случае условием существования синхронных колебаний является неравенство

$$\operatorname{tg}\varphi_s < 0. \tag{7}$$

Поэтому при предельном переходе $W_1 \to 0$, согласно формуле (4), для тяжелых частиц получим

$$V = \frac{\pi^3 a_1^2 a_3^2 a_5^2}{\langle k_0(\sigma)\rangle} \sqrt{\alpha \frac{qE_0}{\varepsilon_0} \langle k_0^2(\sigma)[1-n(\sigma)]\rangle \langle k_0^2(\sigma) n(\sigma)\rangle^{\frac{1}{2}}}, \tag{8}$$

для легких —

$$V = \frac{\pi^3 a_1^2 a_3^2 a_5^2}{\langle k_0(\sigma)\rangle} \sqrt{\alpha \frac{qE_0}{\varepsilon_0} \left[1 - \frac{4q^2}{9E_0^4}\left(\frac{\varepsilon_0}{m_0 c^2}\right)^8 \langle k_0^2(\sigma)\rangle^2\right]^{\frac{1}{4}} \times}$$

$$\times \langle k_0^2(\sigma)[1-n(\sigma)]\rangle \langle k_0^2(\sigma) n(\sigma)\rangle^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Приведем некоторые вспомогательные рассуждения. Заметим, что для замкнутой несамопересекающейся кривой*

$$\langle k_0(\sigma)\rangle = \frac{2\pi}{L}. \tag{10}$$

Доказательство этого факта можно получить просто следующим образом. Расположим ось Ox так, чтобы она, касаясь кривой, не имела с ней общих точек, кроме точки касания. Дугу σ будем отсчитывать от точки касания O против часовой стрелки. Пусть $\varphi(\sigma)$ — угол между произвольной касательной к кривой и осью Ox. На участке дуги в окрестности точки O кривизна положительна, а угол $\varphi(\sigma)$ растет вместе с σ. Поэтому справедливо соотношение [4]

$$k_0(\sigma) = \frac{d\varphi}{d\sigma} \tag{11}$$

при всех σ. Отсюда

$$\varphi = \int_0^\sigma k_0(\sigma)\,d\sigma. \tag{12}$$

Если в формуле (12) положить $\sigma = L$, то, вследствие того, что кривая несамопересекающаяся, $\varphi = 2\pi$. Таким образом,

$$2\pi = \int_0^L k_0(\sigma)\,d\sigma. \tag{13}$$

Разделив обе части равенства (13) на L, получим

$$\frac{1}{L}\int_0^L k_0(\sigma)\,d\sigma = \frac{2\pi}{L}, \tag{14}$$

что и требовалось доказать.

Исходя из выражений (8) и (9), можно сформулировать задачу об оптимальном выборе равновесной траектории**, т. е. выборе функций $k_0(\sigma)$ и $n(\sigma)$. Если величины ε_0, q, m_0, l, E_0, $\langle k_0^2(\sigma)\rangle = Q$ и L подобраны определенным образом согласно техническим и экономическим условиям, то наилучшим будет такой выбор функций $k_0(\sigma)$ и $n(\sigma)$, при котором величина V будет максимальной.

Введем в выражениях (8) и (9) обозначение

$$\langle k_0^2(\sigma)\,n(\sigma)\rangle = x. \tag{15}$$

Тогда максимальное значение этих выражений будет там, где функция

$$f(x) = (Q - x)\,x^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

имеет максимум, что, очевидно, выполняется при

$$x = \frac{Q}{3}. \tag{17}$$

Таким образом, максимум нижней границы области захвата V будет обеспечивать любые периодические с периодом L функции $k_0(\sigma)$ и $n(\sigma)$, удовлетворяющие интегральным уравнениям

$$\langle k_0^2(\sigma)\rangle = Q \tag{18}$$

---

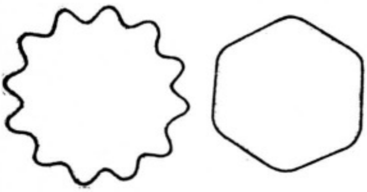
* Частный случай теоремы Гаусса — Бонне.

** Подобная задача сформулирована в работе [3]. Но вследствие допущенной неточности там она фактически не была решена.

и

$$\langle k_0^2(\sigma)\, n(\sigma)\rangle = \frac{Q}{3}. \qquad (19)$$

Очевидно, что существует бесконечно много функций, удовлетворяющих поставленным требованиям. Это обстоятельство существенно упрощает задачу о практическом выборе $k_0(\sigma)$ и $n(\sigma)$: эти функции можно брать, например, в виде суммы из конечного числа слагаемых, пропорциональных $\cos m\theta$ и $\sin m\theta$; амплитуды, стоящие при этих членах, нужно выбрать при этом так, чтобы выполнялись условия (18) и (19)



Если, например, положить $n = \frac{1}{3}$, то получим единственное условие (18), которому могут удовлетворять кривые с одной и той же длиной L вида, изображенного на рисунке. При этом вторая из изображенных кривых характеризуется тем, что на ней имеются участки с достаточно большой кривизной, что может обеспечить заданное значение Q.

Отношение частоты радиальных бетатронных колебаний к частоте вертикальных бетатронных колебаний в случае выполнения условий (17) следующее:

$$\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_3} = \sqrt{2}$$

(обозначения заимствованы из работы [5]).

В заключение выражаю благодарность А. А. Шаршанову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Козубовская, А. А. Шаршанов, В. А. Шендрик, О некоторых вариантах выбора параметров ведущей и фокусирующей систем циклического ускорителя, Укр. физич. ж., т. 13, № 9, 1968.
2. І. Г. Козубовська і О. О. Шаршанов, Про граничні випадки вибору нагромаджувача, ДАН УРСР, сер. А, № 6, 1968.
3. А. А. Шаршанов, О функционалах для одного типа оптимальных задач, Укр. матем. ж., т. 20, № 3, 1968.
4. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, изд-во «Наука», М., 1965.
5. И. Г. Козубовская, А. А. Шаршанов, К линейной теории циклических ускорителей релятивистских заряженных частиц в случае малых потерь на излучение, Укр. физич. ж., т. 13, № 1, 1968.

Поступила 5.III 1968 г.

Институт математики АН УССР