УДК 519.24

Некоторые замечания об оценке спектра однородного и изотропного гауссовского поля

П. С. Кнопов

Пусть $x(s, t)$ — однородное и изотропное гауссовское поле в квадрате $\left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}; -\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ с $Mx(s, t) = 0$ и корреляционной функцией

$$R(\varrho) = 2\pi \int_0^\infty I_0(\lambda\varrho)\,\lambda g(\lambda)\,d\lambda, \tag{1}$$

где $I_0(t)$ — бесселева функция нулевого порядка, а функция $g(\lambda)$ — спектральная плотнсcть поля $x(s, t)$.

В заметке предлагается некоторая оценка спектральной функции и изучается ряд ее свойств.

В качестве оценки спектральной функции $F(\lambda) = \int_0^\lambda lg(l)\,dl$ рассмотрим функцию $F_T(\lambda)$, определенную формулой

$$F_T(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2 T^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underset{\cdots}{n=4} \int x(s_1, t_1)\, x(s_2, t_2) \frac{\lambda I_1\left(\lambda \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (t_1 - t_2)^2}\right)}{\sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (t_1 - t_2)^2}}\, ds_1 dt_1 ds_2 dt_2, \tag{2}$$

где $I_1(t)$ — бесселева функция первого порядка.

Для дальнейшего формулу (2) удобно привести к иному виду. Используя формулу

$$\int z I_0(z)\,dz = z I_1(z),$$

получим

$$F_T(\lambda) = \int_0^{\lambda} l \frac{1}{4\pi^2 T^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overset{n=4}{\cdots} \int x(s_1, t_1)\, x(s_2, t_2)\, I_0\left(l \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (t_1 - t_2)^2}\right) \times$$

$$\times\, ds_1 dt_1 ds_2 dt_2 dl = \int_0^{\lambda} l \frac{1}{2\pi} \frac{1}{4\pi^2 T^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overset{n=4}{\cdots} \int x(s_1, t_1)\, x(s_2, t_2) \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} e^{-il[(s_1 - s_2)\cos\varphi + (t_1 - t_2)\sin\varphi]}\, d\varphi\, ds_1 dt_1 ds_2 dt_2 dl$$

или, после замены переменных

$$l\cos\varphi = \lambda_1; \qquad l \sin\varphi = \lambda_2,$$

для функции $F_T(\lambda)$ получим

$$F_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \leqslant \lambda^2} \frac{1}{4\pi^2 T^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overset{n=4}{\cdots} \int x(s_1, t_1)\, x(s_2, t_2) \exp\{-i[(s_1 - s_2)\lambda_1 +$$

$$+ (t_1 - t_2)\lambda_2]\}\, ds_1 dt_1 ds_2 dt_2 d\lambda_1 d\lambda_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \leqslant \lambda^2} \frac{1}{4\pi^2 T^2} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\!\! \int x(s, t)\, e^{-i(s\lambda_1 + t\lambda_2)}\, ds dt \right|^2 d\lambda_1 d\lambda_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \leqslant \lambda^2} I_T(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1 d\lambda_2,$$

где

$$I_T(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{4\pi^2 T^2} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\!\! \int x(s, t)\, e^{-i(s\lambda_1 + t\lambda_2)}\, ds dt \right|^2.$$

В дальнейшем будут использованы следующие обозначения:

1) $g\left(\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\right) = f[\lambda_1, \lambda_2)$;

2) ${}_1\Delta_t^2 f(\lambda_1, \lambda_2) = f(\lambda_1 + t, \lambda_2) + f(\lambda_1 - t, \lambda_2) - 2f(\lambda_1, \lambda_2)$;

$${}_2\Delta_t^2 f(\lambda_1, \lambda_2) = f(\lambda_1, \lambda_2 + t) + f(\lambda_1, \lambda_2 - t) - 2f(\lambda_1, \lambda_2);$$

$${}_1\Delta_x^2\, {}_2\Delta_y^2 f(\lambda_1, \lambda_2) = {}_2\Delta_y^2\, {}_1\Delta_x^2 f(\lambda_1, \lambda_2) = f(\lambda_1 + x, \lambda_2 + y) +$$

$$+ f(\lambda_1 - x, \lambda_2 + y) - 2f(\lambda_1, \lambda_2 + y) + f(\lambda_1 + x, \lambda_2 - y) + f(\lambda_1 - x, \lambda_2 - y) -$$

$$- 2f(\lambda_1, \lambda_2 - y) - 2f(\lambda_1 + x, \lambda_2) - 2f(\lambda_1 - x, \lambda_2) + 4f(\lambda_1, \lambda_2);$$

3) $f(\lambda_1, \lambda_2) \in L_1$ если $\|f\| = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda_1, \lambda_2)|\, d\lambda_1 d\lambda_2 < \infty$;

4) $f(\lambda_1, \lambda_2) \in P^*$, если $\|{}_i\Delta_t^2 f(\lambda_1, \lambda_2)\| = o(t), \quad i = 1, 2;$

5) $T[F_T(\lambda) - MF_T(\lambda)] = \xi_T(\lambda)$;

$$T \left\{ F_T(\lambda) - F(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\lambda_1^2+\lambda_2^2 \leqslant \lambda^2} \frac{1}{T} \left[\int\limits_{\frac{1}{T}}^{\infty} \frac{{}_1\Delta_x^2 f(\lambda_1, \lambda_2)}{x^2} dx + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_{\frac{1}{T}}^{\infty} \frac{{}_2\Delta_y^2 f(\lambda_1, \lambda_2)}{y^2} dy + \frac{1}{T} \iint\limits_{\frac{1}{T}}^{\infty} \frac{{}_1\Delta_{x_2}^2 \Delta_y^2 f(\lambda_1, \lambda_2)}{x^2 y^2} dx dy \right] d\lambda_1 d\lambda_2 \right| = \zeta_T(\lambda).$$

Справедливы следующие теоремы о предельном поведении функции $F_T(\lambda)$.

Теорема 1. *Пусть* $f(\lambda_1, \lambda_2) \in P$. *Тогда*

$$\limsup_{T \to \infty} \sup_{\lambda} T \,|\, MF_T(\lambda) - F(\lambda) -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\lambda_1^2+\lambda_2^2 \leqslant \lambda^2} \frac{1}{T} \left[\int\limits_{\frac{1}{T}}^{\infty} \frac{{}_1\Delta_x^2 f(\lambda_1, \lambda_2)}{x^2} dx + \int\limits_{\frac{1}{T}}^{\infty} \frac{{}_2\Delta_y^2 f(\lambda_1, \lambda_2)}{y^2} dy + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{T} \iint\limits_{\frac{1}{T}}^{\infty} \frac{{}_1\Delta_{x2}^2 \Delta_y^2 f(\lambda_1, \lambda_2)}{x^2 y^2} dx dy \right] d\lambda_1 d\lambda_2 \,| = 0.$$

Доказательство этой теоремы опирается на результаты, полученные в [1 и 2].

Теорема 2. *Предположим, что спектральная плотность ограничена и обращается в нуль не более, чем в счетном числе точек. Тогда при любом* n *вектор* $\{\xi_T(\lambda_1), \xi_T(\lambda_2), \ldots, \xi_T(\lambda_n)\}$ *имеет асимптотически нормальное распределение со средним нуль и корреляционной матрицей*

$$\| 2\pi \int\limits_0^{\min(\lambda_i, \lambda_j)} \lambda g^2(\lambda)\, d\lambda \|.$$

Доказательство теоремы аналогично рассуждениям Ибрагимова, использованных им при изучении свойств спектральной функции случайного процесса [3].

Из теорем 1 и 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и* 2. *Тогда при любом* n *вектор* $\{\zeta_T(\lambda_1), \zeta_T(\lambda_2), \ldots \zeta_T(\lambda_n)\}$ *распределен асимптотически нормально со средним нуль и корреляционной матрицей*

$$\left\| 2\pi \int\limits_0^{\min(\lambda_i, \lambda_j)} \lambda g^2(\lambda)\, d\lambda \right\|.$$

---

* Аналогичный класс функций в одномерном случае был введен А. Зигмундом в [4].

Обозначим через $\zeta(\lambda)$ гауссовский процесс на $[0, \infty)$ с $\zeta(0) = 0$, $M\zeta(\lambda) = 0$ и

$$M\zeta(\lambda_i)\zeta(\lambda_j) = 2\pi \int_0^{\min(\lambda_i, \lambda_j)} \lambda g^2(\lambda)\, d\lambda.$$

Пусть $C[0, \infty]$—пространство непрерывных на $[0, \infty]$ функций $z(\lambda)$ и таких, что существует отличный от бесконечности $\lim\limits_{\lambda\to\infty} z(\lambda) = z(\infty)$, а P_T и P—меры, порожденные соответственно процессами $\eta_T(\lambda) = \zeta_T(\sqrt{\lambda})$ и $\eta(\lambda) = \zeta(\sqrt{\lambda})$.

Теорема 4. *Предположим, что выполняются условия теоремы 3 и $|g'(\lambda)| \leqslant M$. Тогда при $T \to \infty$ мера P_T слабо сходится к мере P.*

Из этой теоремы вытекают два утверждения, которые могут иметь статистические приложения.

Теорема 5. *Предположим, что выполнены условия теоремы 4. Тогда*

$$P\{\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant\infty} |\zeta_T(\lambda)| < \alpha\} \to P\{\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant\infty} |\zeta(\lambda)| < \alpha\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \left[\Phi\left(\frac{(2k+1)\alpha}{\sqrt{2\pi G_2}}\right) - \Phi\left(\frac{(2k-1)\alpha}{\sqrt{2\pi G_2}}\right)\right] = \Delta\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi G_2}}\right);$$

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}} dt; \qquad G_2 = \int_0^{\infty} \lambda g^2(\lambda)\, d\lambda.$$

Рассмотрим величину

$$G_2^T = \int_0^{A_T} r R_T^2(r)\, dr,$$

где

$$R_T(r) = \frac{1}{T^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-r} x(s, t)\, x(s, t+r)\, ds dt;$$

$A_T < T$; $A_T \uparrow \infty$ при $T \to \infty$ и $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{A_T}{T} = 0$. Величину G_2^T используем в качестве оценки величины G_2. Можно показать, при выполнении условий теоремы 4, величина G_2^T будет асимптотически несмещенной и состоятельной оценкой величины G_2. Рассмотрим теперь две независимые реализации случайного поля $x(s, t)$ в областях $\left[-\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2}; -\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2}\right]$ и $\left[-\frac{T_2}{2}, \frac{T_2}{2}; -\frac{T_2}{2}, \frac{T_2}{2}\right]$. Пусть $F_{T_1}(\lambda)$ и $F_{T_2}(\lambda)$ — оценки спектральной функции $F(\lambda)$, построенные по этим реализациям.

Теорема 6. *Предположим, что*

$$T^2 = \frac{2T_1^2 T_2^2}{T_1^2 + T_2^2} \text{ и } \lim_{T\to\infty} |T_2 - T_1| = c < \infty$$

и пусть выполняются условия теоремы 4. Тогда

$$P\left\{\frac{\sup\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant\infty} T|F_{T_1}(\lambda) - F_{T_2}(\lambda)|}{\sqrt{G_2^{T_1} + G_2^{T_2}}} > \alpha\right\} \to 1 - \Delta(\alpha) \text{ при } T \to \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Голинский, О приближении на всей числовой оси двух сопряженных по М. Риссу функций, Матем. сб., 66 (108): 1, 1965.
2. А. В. Ефимов, О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера, Изв. АН СССР, серия матем., т. 22, 1958.
3. И. А. Ибрагимов, Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса, Теория вероятностей и ее применения, VII, 4, 1963.
4. A. Zygmund, Smooth functions, Duke Math. Journ., **12**, 1945.

Поступила 2.III 1966 г.
Институт кибернетики АН УССР