УДК 517.5

Обращение теоремы типа Келлога

Л. И. Колесник

Пусть $z = \Psi(w)$ — функция, осуществляющая конформное отображение единичного круга $|w| < 1$ на некоторую область D, ограниченную замкнутой спрямляемой кривой Жордана Γ; $w = \Phi(z)$ — функция ей обратная; $z(s) = x(s) + iy(s)$ — параметрическое уравнение кривой Γ, а $\theta(s)$ — угол между вещественной осью и касательной к Γ в точке $z(s)$, как функция дугового параметра s на Γ ($0 \leqslant s \leqslant l$, где l — длина кривой Γ).

В известной теореме Келлога [1] доказано, что если функция $\theta(s)$ удовлетворяет условию Гельдера

$$|\theta(s_1) - \theta(s_2)| = O(|s_2 - s_1|^{\alpha}), \qquad 0 < \alpha < 1,$$

то функция $\Psi'(\varrho e^{i\varphi})$ непрерывна в замкнутом круге $\varrho \leqslant 1$, а на окружности $\varrho = 1$ $\Psi'(e^{i\varphi})$ отлична от нуля и удовлетворяет условию

$$|\Psi'(e^{i\varphi_1}) - \Psi'(e^{i\varphi_2})| = O(|\varphi_2 - \varphi_1|^{\alpha}), \qquad 0 < \alpha < 1.$$

С целью исследовать этот вопрос для $\alpha = 1$ Р. Н. Ковальчук [2] ввел в рассмотрение модули гладкости указанных функций и получил следующее.

Теорема (Ковальчук). Если функция $\theta(s)$ непрерывна на $[0, l]$ и $\omega_2(\theta; \delta) = O(\delta^{\alpha})$, $0 < \alpha < 2$, то модуль гладкости

$$\omega_2(\Psi'; \delta) = \sup_{|\varphi_2 - \varphi_1| \leqslant 2\delta} |\Psi'(e^{i\varphi_1}) - 2\Psi'(e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}) + \Psi'(e^{i\varphi_2})| \tag{1}$$

функции $\Psi'(\varrho e^{i\varphi})$ на окружности $\varrho = 1$ удовлетворяет условию $\omega_2(\Psi'; \delta) = O(\delta^{\alpha})$, $0 < \alpha < 2$.

В настоящей заметке доказано обратное утверждение.

Теорема. *Если функция $\Psi'(\varrho e^{i\varphi})$ непрерывна в замкнутом круге $\varrho \leqslant 1$, а на единичной окружности $\varrho = 1$ отлична от нуля и имеет модуль гладкости $\omega_2(\Psi'; \delta) = O(\delta^{\alpha})$, $0 < \alpha \leqslant 2$, то модуль гладкости $\omega_2(\theta; \delta)$ функции $\theta(s)$ удовлетворяет условию $\omega_2(\theta; \delta) = O(\delta^{\alpha})$, $0 < \alpha \leqslant 2$.*

Для доказательства теоремы потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Если комплекснозначная функция $f(e^{i\varphi})$ отлична от нуля на $[0, 2\pi]$ и имеет модуль гладкости*

$$\omega_2(f; \delta) = \sup_{|\varphi_2 - \varphi_1| \leqslant 2\delta} |f(e^{i\varphi_1}) - 2f(e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}) + f(e^{i\varphi_2})|,$$

то $\omega_2(|f|; \delta) \leqslant A\omega_2(f; \delta)$, где A зависит от f.

В справедливости ее убеждаемся непосредственной проверкой.

Лемма 2. *Если функция $\Psi'(\varrho e^{i\varphi})$ непрерывна в $\varrho \leqslant 1$, а на единичной окружности $\varrho = 1$ отлична от нуля*

$$0 < m \leqslant |\Psi'(e^{i\varphi})| \leqslant M \tag{2}$$

и имеет модуль гладкости $\omega_2(\Psi'; \delta) = O(\delta^\alpha)$, $0 < \alpha \leqslant 2$, то модуль гладкости

$$\omega_2(\Phi'; \delta) = \sup_{|s_2 - s_1| \leqslant 2\delta} \left|\Phi'(z(s_1)) - 2\Phi'\left[z\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)\right] + \Phi'(z(s_2))\right|$$

функции $\Phi'(z(s))$ на кривой Γ также удовлетворяет условию

$$\omega_2(\Phi'; \delta) = O(\delta^\alpha), \quad 0 < \alpha \leqslant 2.$$

Доказывается аналогично замечанию в конце работы [2]. Следствием предыдущих лемм и известного равенства $s(\varphi) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} |\Psi'(e^{it})|\,dt$ ([3], стр. 462) является

Лемма 3. *Если функция $\Psi'(\varrho e^{i\varphi})$ удовлетворяет требованиям леммы 2, то $\omega_2\left(\frac{d\varphi}{ds}; \delta\right) = O(\delta^\alpha)$, $0 < \alpha \leqslant 2$, где $\varphi(s) = \arg \Phi[z(s)]$.*

Лемма 4 (основная). *Если функция $\Psi'(\varrho e^{i\varphi})$ удовлетворяет требованиям леммы 2, то производная $z'(s)$ функции $z(s) = x(s) + iy(s)$ непрерывна на $[0, l]$ и ее модуль гладкости удовлетворяет условию*

$$\omega_2(z'; \delta) = O(\delta^\alpha), \qquad 0 < \alpha \leqslant 2. \tag{3}$$

Доказательство. Видим, что в условиях леммы 4 функция $z'(s)$ непрерывна.

Если $0 < \alpha < 1$, тогда, в силу соотношения между модулем непрерывности и модулем гладкости функции $\Psi'(e^{i\varphi})$ (см. [4], стр. 119) и теоремы Варшавского ([5], п. 107), немедленно имеем (3).

Для доказательства (3) при $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$ достаточно убедиться в справедливости следующих порядковых равенств:

$$\omega_2(x'; \delta) = O(\delta^\alpha) \tag{4}$$

и

$$\omega_2(y'; \delta) = O(\delta^\alpha). \tag{4'}$$

Остановимся на доказательстве соотношения (4). Очевидно, что $x(s) = U(\varphi(s))$, где $U(\varphi) = \operatorname{Re}\Psi(e^{i\varphi})$.

Принимая во внимание равенство

$$s(\varphi) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} |\Psi'(e^{it})|\,dt, \tag{5}$$

имеем

$$x'(s) = \frac{dU}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{ds} = \frac{dU}{d\varphi}\cdot\frac{1}{|\Psi'(e^{i\varphi})|} = \frac{dU}{d\varphi}\,|\Phi'(z(s))|. \tag{6}$$

Учитывая (6) и пользуясь сокращенными обозначениями $\varphi_i = \varphi(s_i)$, $i = 1, 2$; $\varphi_3 = \varphi\left(\frac{s_1 + s_2}{2}\right)$, получим

$$\frac{|\Delta_h^2 x'(s)|}{|s_2 - s_1|^\alpha} = \frac{\left|x'(s_1) - 2x'\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right) + x'(s_2)\right|}{|s_2 - s_1|^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{|s_2 - s_1|^\alpha}\left|U'(\varphi_1)\frac{d\varphi_1}{ds} - 2U'(\varphi_3)\frac{d\varphi_3}{ds} + U'(\varphi_2)\frac{d\varphi_2}{ds}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\varphi_2-\varphi_1|^{\alpha}}{|s_2-s_1|^{\alpha}}\left|\frac{d\varphi_1}{ds}\right|\frac{\left|U'(\varphi_1)-2U'\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)+U'(\varphi_2)\right|}{|\varphi_2-\varphi_1|^{\alpha}}+$$

$$+2\left|\frac{d\varphi_1}{ds}\right|\frac{\left|U'\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)-U'(\varphi_3)\right|}{|s_2-s_1|^{\alpha}}+|U'(\varphi_3)|\frac{\left|\frac{d\varphi_1}{ds}-2\frac{d\varphi_3}{ds}+\frac{d\varphi_2}{ds}\right|}{|s_2-s_1|^{\alpha}}+$$

$$+\frac{1}{|s_2-s_1|^{\alpha}}|U'(\varphi_3)-U'(\varphi_2)|\left|\frac{d\varphi_1}{ds}-\frac{d\varphi_2}{ds}\right|=I_1+2I_2+I_3+I_4. \quad (7)$$

Для дальнейшего заметим, что в силу (5) и (2)

$$\frac{|\varphi_2-\varphi_1|}{|s_2-s_1|}=O(1). \quad (8)$$

Видим, что $I_1=O(1)$ в силу (8), (2) и очевидного неравенства $\omega_2(U';\delta)\leqslant A_3\omega_2(\Psi';\delta)$, а $I_3=O(1)$ в силу леммы 3.

При оценке I_2 и I_4 рассмотрим 2 случая.

1. Пусть $\alpha=1$, тогда в силу теоремы Зигмунда ([4], стр. 119) $U'(\varphi)\in H^{1-\varepsilon}$ (где $\varepsilon>0$, как угодно мало) и $\frac{d\varphi}{ds}\in H^{1-\varepsilon}$.

Учитывая последние замечания и известное соотношение

$$\omega_2(\varphi;\delta)\leqslant\delta\omega_1(\varphi';\delta), \quad (9)$$

имеющее место для функции $\varphi(s)$, обладающей ограниченной производной $\varphi'(s)$ [4], получим

$$I_2=\left|\frac{d\varphi_1}{ds}\right|\frac{\left|U'\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)-U'(\varphi_3)\right|}{|s_2-s_1|}=\frac{O\left(\left|\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}-\varphi_3\right|^{1-\varepsilon}\right)}{|s_2-s_1|}=$$

$$=\frac{O(|\varphi_1-2\varphi_3+\varphi_2|)}{|s_2-s_1|}=\frac{O([|s_2-s_1|^{1+(1-\varepsilon)}]^{1-\varepsilon})}{|s_2-s_1|}=O(1);$$

$$I_4=\frac{1}{|s_2-s_1|}|U'(\varphi_3)-U'(\varphi_2)|\left|\frac{d\varphi_1}{ds}-\frac{d\varphi_2}{ds}\right|=$$

$$=\frac{O(|\varphi_3-\varphi_2|^{1-\varepsilon})\,O(|s_2-s_1|^{1-\varepsilon})}{|s_2-s_1|}=\frac{O\left(\left|\frac{s_2-s_1}{2}\right|^{1-\varepsilon}\right)O(|s_2-s_1|^{1-\varepsilon})}{|s_2-s_1|}=O(1).$$

2. Пусть $1<\alpha\leqslant 2$, тогда в силу обобщенной теоремы Зигмунда ([4], стр. 119) $U'(\varphi)\in H$. Но в таком случае $\Phi'(z(s))$ также принадлежит классу H ([3], п. 104), а значит и $\varphi'(s)\in H$. Учитывая эти замечания и (9), получим

$$I_2=\frac{O(|\varphi_1-2\varphi_3+\varphi_2|)}{|s_2-s_1|^{\alpha}}=\frac{O(|s_2-s_1|^2)}{|s_2-s_1|^{\alpha}}=O(1);$$

$$I_4=\frac{O\left(\left|\frac{s_2-s_1}{2}\right|\right)O(|s_2-s_1|)}{|s_2-s_1|^{\alpha}}=\frac{O(|s_2-s_1|^2)}{|s_2-s_1|^{\alpha}}=O(1).$$

Таким образом, при всех $0<\alpha\leqslant 2$ $\frac{|\Delta_h^2 x'(s)|}{|s_2-s_1|^{\alpha}}=O(1)$, что и доказывает справедливость (4).

Аналогичным образом убеждаемся в справедливости (4′). Таким образом, лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Модули гладкости непрерывных на* $[0, l]$ *функций* $e^{i\theta(s)}$ *и* $\theta(s)$ *одного и того же порядка*:

$$A_1\omega_2(\theta;\ \delta) \leqslant \omega_2(e^{i\theta(s)}) \leqslant A_2\omega_2(\theta;\ \delta), \tag{10}$$

где A_1 *и* A_2 — *положительные константы.*

Доказательство. Легко видеть, что при всех s_i таких, что существует функция $\theta(s_i)$, имеет место тождество

$$e^{2i\theta\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)} - e^{i[\theta(s_1)+\theta(s_2)]} =$$

$$= \frac{2}{i}\sin\frac{\theta(s_1) - 2\theta\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right) + \theta(s_2)}{2}\, e^{\frac{i}{2}\left[\theta(s_1+2\theta\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)+\theta(s_2)\right]}. \tag{11}$$

Учитывая (11) и известные неравенства: $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}|\sin x|$ при $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\omega_1^2(f;\ \delta) \leqslant C\omega_2(f;\ \delta)$ (см. [6]) для достаточно малых h, имеем

$$\frac{1}{2}|\Delta_h^2\theta(s)| = \frac{1}{2}\left|\theta(s_1) - 2\theta\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right) + \theta(s_2)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2}\left|\sin\frac{\theta(s_1) - 2\theta\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right) + \theta(s_2)}{2}\right| =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\left|\frac{2}{i}\sin\frac{\theta(s_1) - 2\theta\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right) + \theta(s_2)}{2}\, e^{\frac{i}{2}\left[\theta(s_1)+2\theta\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)+\theta(s_2)\right]}\right| =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left|e^{2i\theta\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)} - e^{i[\theta(s_1)+\theta(s_2)]}\right| = \frac{\pi}{4}\left|e^{i\theta(s_2)}\left[e^{i\theta(s_1)} - 2e^{i\theta\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)} + e^{i\theta(s_2)}\right| -\right.$$

$$\left. - \left[e^{i\theta(s_2)} - e^{i\theta\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)}\right]^2\right| \leqslant A'|\Delta_h^2 e^{i\theta(s)}|. \tag{12}$$

С другой стороны, учитывая, что $\omega(\cos x;\ \delta) = O(\delta)$ и $\omega_2(\cos x;\ \delta) = O(\delta^2)$ (то же самое и для $\sin x$), имеем

$$|\Delta_h^2 e^{i\theta(s)}| = \left|e^{i\theta(s_1)} - 2e^{i\theta\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)} + e^{i\theta(s_2)}\right| \leqslant \left|\cos\theta(s_1) - 2\cos\theta\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \cos\theta(s_2)\right| + \left|\sin\theta(s_1) - 2\sin\theta\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right) + \sin\theta(s_2)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\left[\cos\theta(s_1) - 2\cos\left(\frac{\theta(s_1)+\theta(s_2)}{2}\right) + \cos\theta(s_2)\right] + 2\left[\cos\left(\frac{\theta(s_1)+\theta(s_2)}{2}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \cos\theta\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)\right]\right| + \left|\left[\sin\theta(s_1) - 2\sin\left(\frac{\theta(s_1)+\theta(s_2)}{2}\right) + \sin\theta(s_2)\right] + \right.$$

$$\left. + 2\left[\sin\left(\frac{\theta(s_1)+\theta(s_2)}{2}\right) - \sin\theta\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left\{|\theta(s_1) - \theta(s_2)|^2 + 2\left|\frac{\theta(s_1)+\theta(s_2)}{2} - \theta(s_3)\right|\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\{|\Delta_h\theta(s)|^2 + 2|\Delta_h^2\theta(s)|\} \leqslant A_2|\Delta_h^2\theta(s)|. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует (10).

Доказательство теоремы. Из условия теоремы о модуле гладкости функции $\Psi'(e^{i\varphi})$ $(\omega_2(\Psi'; \delta) = O(\delta^\alpha))$ в силу леммы 4 следует, что

$$\omega_2(z'; \delta) = \omega_2(e^{i\theta}; \delta) = O(\delta^\alpha), \quad 0 < \alpha \leqslant 2,$$

а, согласно лемме 5, в таком случае $\omega_2(\theta; \delta) = O(\delta^\alpha)$, $0 < \alpha \leqslant 2$.

Этим теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. O. D. Kellog, Harmonic funkions and Greens integral, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 13, 1912, 109—132.
2. Р. Н. Ковальчук, Об одном обобщении теоремы Келлога, УМЖ, т. 17, № 4, 1965.
3. Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, М., 1952.
4. А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960.
5. S. Warschawski, Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungs — funktion bei konformen Abbildung, Math. Z., Bd. 35, 1932, s. 321—456.
6. Р. М. Тригуб, Приближение функций с данным модулем гладкости на внешности отрезка, ДАН СССР, 132, № 2, 1960.

Поступила 17.X 1966 г.,
после переработки — 7.XII 1967 г.

Институт математики АН УССР,
Нежинский педагогический институт