УДК 517.944

О задаче Коши для гиперболического уравнения с функционально возмущенным аргументом

Д. Г. Кореневский, С. Ф. Фещенко

В банаховом пространстве E рассмотрим гиперболическое дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^{2n}U(t,x)}{\partial x^n \partial t^n} = f\Bigg(t, x, U(t,x), \frac{\partial U(t,x)}{\partial x}, \frac{\partial U(t,x)}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^r U(t,x)}{\partial t^m \partial x^s},$$

$$U(t-\tau, x), \frac{\partial U(t-\tau,x)}{\partial x}, \frac{\partial U(t-\tau,x)}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^r U(t-\tau,x)}{\partial t^m \partial x^s}\Bigg) \quad (1)$$

$$(s = 0, 1, \ldots, n;\ m = 0, 1, \ldots, n-1;\quad s+m = r \leqslant 2n-1),$$

где функция f определена в связной в E области определения D; $\tau = \tau(t, x)$ — функциональное возмущение аргумента t, удовлетворяющее условию $\tau \geqslant 0$ для всех рассматриваемых значений t и x $(t_0 \leqslant t,\ x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$.

К уравнению типа (1) сводятся некоторые задачи автоматического регулирования динамических систем с распределенными параметрами и запаздывающими обратными связями.

Под решением уравнения (1) в прямоугольнике $[t_0 \leqslant t \leqslant T,\ x_0 \leqslant x \leqslant x_1]$ понимается непрерывная в указанном прямоугольнике вместе со своими частными производными $(s+m)$-го порядка функция $U(t, x)$, принимающая значения из D и имеющая при всех $(t, x) \in [t_0, T] \times [x_0, x_1]$ производную $2n$-го порядка, удовлетворяющую уравнению (1).

Задачей Коши по переменной t называется задача об отыскании решения по заданному начальному условию

$$\left.\frac{\partial^r U(t,x)}{\partial t^m \partial x^s}\right|_{(t,x)\in[t_0-\tau_0,\, t_0]\times[x_0,\, x_1]} = \frac{\partial^r \varphi(t,x)}{\partial t^m \partial x^s}, \quad (2)$$

где начальная функция $\varphi(t, x)$ определена в прямоугольнике $[t_0-\tau_0, t_0] \times \times [x_0, x_1]$ и принимает значения в D. Здесь $\tau_0 = \sup \tau$ при $(t, x) \in [t_0, T] \times \times [x_0, x_1]$. Задача Коши называется корректной, если: решение системы (1), (2) существует для каждого $\varphi(t, x)$; решение единственно и непрерывно зависит от начальных условий в том смысле, что из $\varphi_i(t, x) \to \varphi(t, x)$ для всех $(t, x) \in [t_0 - \tau_0, t_0] \times [x_0, x_1]$ следует $U_i(t, x) \to U(t, x)$ для всех $(t, x) \in \in (t_0, T] \times [x_0, x_1]$. Здесь φ_i — последовательность начальных функций, U_i — последовательность соответствующих решений.

Теорема 1. *Если:* а) *функция f непрерывна по совокупности своих аргументов и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная с третьего, равномерно относительно t и x с постоянной Липшица L;* б) *функция τ непрерывна по совокупности своих аргументов;* в) *начальная функция φ непрерывна вместе со своими частными производными до r-го порядка включительно в области своего определения, то существуют числа $h_1 > 0$ и $\sigma_1 > 0$ такие, что решение задачи Коши существует в прямоугольнике $[t_0, t_0 + h_1) \times [x_0, x_0 + \sigma_1)$ и оно единственно.*

Доказательство. Рассмотрим пространство M непрерывно дифференцируемых до r-го порядка включительно функций $U(t, x)$ и введем расстояние ϱ между двумя точками V и W с помощью соотношения

$$\varrho(V, W) = \sup_{[t_0-\tau_0,\, T]\times[x_0,\, x_1]} |V(t, x) - W(t, x)| + \sup_{[t_0-\tau_0,\, T]\times[x_0,\, x_1]} \left| \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial W(t, x)}{\partial x} \right| + \sup_{[t_0-\tau_0,\, T]\times[x_0,\, x_1]} \left| \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial W(t, x)}{\partial t} \right| + \ldots$$

$$\ldots + \sup_{[t_0-\tau_0,\, T]\times[x_0,\, x_1]} \left| \frac{\partial^r V(t, x)}{\partial t^m \partial x^s} - \frac{\partial^r W(t, x)}{\partial t^m \partial x^s} \right|. \qquad (3)$$

При таком выборе ϱ пространство M будет полным метрическим пространством [1, 2]. В силу свойств функций f, τ, φ функции U, $\dfrac{\partial U}{\partial t}$, $\dfrac{\partial U}{\partial x}$, ..., $\dfrac{\partial^r U}{\partial t^m \partial x^s}$ образуют компактное в смысле равномерной сходимости множество.

Переходя от дифференциального уравнения (1) к его эквивалентному интегральному уравнению и рассматривая оператор Φ, определенный при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \sigma$ этим интегральным уравнением (h и σ — достаточно малые и такие, что $t_0 + h \in [t_0, T]$, $x_0 + \sigma \in [x_0, x_1]$)

$$\Phi U(t, x) = \varphi(t_0, x_0) + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t}}_{n} \underbrace{\int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x}}_{n} f\left(\xi, \eta, U(\xi, \eta), \ldots, \frac{\partial^r U(\xi - \tau, \eta)}{\partial \xi^m \partial \eta^s}\right) \partial \xi^n d\eta^n, \qquad (4)$$

нетрудно показать, что

$$\varrho(\Phi V, \Phi W) \leqslant 2L(h^n \sigma^n + h^n \sigma^{n-1} + h^{n-1}\sigma^n + \ldots + h^{n-m}\sigma^{n-s}) \qquad \varrho(V, W). \quad (5)$$

Выбирая

$$h_1 = \min\left\{\lambda, h, \frac{1}{2(r+1)(r+2)L}\right\}, \qquad \sigma_1 = \min\left\{\lambda, \sigma, \frac{1}{2(r+1)(r+2)L}\right\},$$

видим, что при $t_0 \leqslant t < t_0 + h_1$, $x_0 \leqslant x < x_0 + \sigma_1$ оператор Φ сжимающий. Последнее означает, что существует единственная неподвижная точка его в пространстве $M \left(\lambda = \dfrac{1}{2(r+1)(r+2)}\right)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если в уравнении* (1): а) *функции*

$$f\left(t, x, U(t, x), \ldots, \frac{\partial^r U(t-\tau, x)}{\partial t^m \partial x^s}, \mu\right), \quad \tau(t, x, \mu)$$

непрерывные по совокупности своих аргументов соответственно в областях своего определения и при $\mu_1 < \mu < \mu_2$; б) *функция* f *удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная с третьего, равномерно относительно* t, x *и параметра* μ; в) *начальная функция* $\varphi(t,x)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1, *то решение задачи Коши* (1), (2) *непрерывно зависит от параметра* μ.

Теорема 3. *При условиях теоремы* 1 *решение задачи Коши* (1), (2) *непрерывно зависит от начальной функции* $\varphi(t, x)$.

Теорема 4. *Если начальная функция* $\varphi(t, x, \mu)$ *непрерывно зависит от параметра* μ, *то таким же свойством обладает и решение задачи Коши* (*при условиях теоремы* 2).

Поскольку доказательства теорем 2—4 являются следствиями оценок, которые использованы при доказательстве теоремы 1, мы не приводим доказательства указанных теорем.

Примечание. В случае, если предположить, что $\tau(t, x) > 0$, то требования к функции f можно ослабить: выполнение условия Липшица по аргументах, начиная с $U(t-\tau, x)$ и далее, излишне. В самом деле, обозначая $\Delta = \inf\limits_{(t,x)} \tau$ и применяя метод шагов [2] с шагом Δ, на первом шаге $t_0 < t \leqslant t_0 + \Delta$ получим вместо уравнения (1) следующее уравнение без возмущения аргумента:

$$\frac{\partial^{2n} U(t, x)}{\partial x^n \partial t^n} = f\left(t, x, U(t, x), \ldots, \frac{\partial^r U(t, x)}{\partial t^m \partial x^s}, \varphi(t, x), \ldots, \frac{\partial^r \varphi(t, x)}{\partial t^m \partial x^s}\right),$$

для существования решений задачи Коши которого достаточно выполнения условий Липшица лишь по аргументам $U(t, x), \ldots, \dfrac{\partial^r U(t, x)}{\partial t^m \partial x^s}$.

В заключение отметим, что настоящая статья является прямым продолжением исследований авторов [3] на уравнениях высших порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, М., 1965.
2. Л. Э. Эльсгольц, Качественные методы в математическом анализе, М., 1955.
3. Д. Г. Кореневский, С. Ф. Фещенко, К теории систем с распределенными параметрами и запаздыванием, УМЖ, т. 19, № 4, 1967.

Поступила 8.IV 1968 г.

Институт математики АН УССР