УДК 517.919

Об устойчивой ограниченности решений векторного уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами

Д. Я. Моисеенко

В работе рассматривается векторное уравнение второго порядка

$$\ddot{\bar{z}}(t) + P(t)\bar{z}(t) = 0, \tag{1}$$

где $\bar{z}(t)$ — n-мерная вектор-функция, $P(t)$ — периодическая периода 2π, вещественная симметрическая суммируемая в $(0, 2\pi)$ положительно определенная квадратная порядка n матрица-функция, t — безразмерное время.

Известно [1], что все решения уравнения (1) устойчиво ограничены, если

$$\lambda_1(P) > 1, \tag{2}$$

где $\lambda_1(P)$ — первое положительное характеристическое число краевой задачи:

$$\ddot{\bar{z}}(t) + \lambda P(t)\bar{z}(t) = 0; \tag{3}$$

$$\bar{z}(0) + \bar{z}(2\pi) = \dot{\bar{z}}(0) + \dot{\bar{z}}(2\pi) = 0. \tag{4}$$

Известно также [1], что первое положительное характеристическое число краевой задачи (3), (4) $\lambda_1(P)$ существует и может быть получено как решение следующей вариационной задачи:

$$\frac{1}{\lambda_1(P)} = \max_{\bar{z}\in G}\left[\frac{\int_0^{2\pi}\bar{z}'P\bar{z}dt}{\int_0^{2\pi}\dot{\bar{z}}'\dot{\bar{z}}dt}\right], \tag{5}$$

где G — класс всех непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\bar{z}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, удовлетворяющих условию (4); $(')$ — знак транспонирования, применяемый к вектор-столбцу.

Введем параметр ν формулой

$$\nu = \lambda - 1. \tag{6}$$

Тогда вариационную задачу (5) можно записать так:

$$\nu_1(P) = \min_{\bar{z}\in G} \left[\frac{\int\limits_0^{2\pi} [\dot{\bar{z}}'\dot{\bar{z}} - \bar{z}'P\bar{z}]\, dt}{\int\limits_0^{2\pi} \bar{z}'P\bar{z}dt} \right]. \tag{7}$$

Учтя соотношения (2) и (6), запишем достаточное условие устойчивой ограниченности решений уравнения (1) следующим образом:

$$\nu_1(P) > 0. \tag{8}$$

Здесь $\nu_1(P)$ — решение вариационной задачи (7). Обозначим через $\bar{z}_1(t)$ функцию, реализующую минимум выражения в правой части (7). Для проверки условия (8) при заданной матрице $P(t)$ воспользуемся приемом, примененным в [2] для скалярного дифференциального уравнения второго порядка, обобщив при этом метод на векторное уравнение (1). Для этого введем в рассмотрение функционал

$$D[\bar{z}(t)] = \int\limits_0^{2\pi} [\dot{\bar{z}}'\dot{\bar{z}} - \bar{z}'P\bar{z}]\, dt. \tag{9}$$

Тогда условие (8) эквивалентно требованию

$$D[\bar{z}_1(t)] > 0, \tag{10}$$

так как матрица $P(t)$ по условию положительно определенная.

Введем полную ортонормированную систему функций:

$$\psi_1(t) = \frac{\cos\frac{1}{2}t}{\sqrt{\pi}}; \qquad \psi_2(t) = \frac{\sin\frac{1}{2}t}{\sqrt{\pi}}; \qquad \psi_3(t) = \frac{\cos\frac{3}{2}t}{\sqrt{\pi}};\dots \tag{11}$$

Тогда существуют такие постоянные вектор-столбцы $\bar{a}_k$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$, что

$$\bar{z}_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k\psi_k(t). \tag{12}$$

Подставив (12) в выражение (9) и осуществив там интегрирование, получим квадратичную форму

$$D[\bar{z}_1(t)] = \bar{a}'V\bar{a}, \tag{13}$$

где $\bar{a}'$ — бесконечномерная вектор-строка $\bar{a}' = (\bar{a}_1', \bar{a}_2', \dots)$, V — квадратная матрица бесконечного порядка.

Фиксируем некоторое положительное целое число l, для которого рассмотрим вектор-функцию, определяющуюся формулой:

$$\bar{z}_1^{(l)}(t) = \sum_{k=1}^{l} \bar{a}_k\psi_k(t).$$

Запишем, далее, конечную последовательность чисел:

$$1,\ \det V_1^{(l)}, \det V_2^{(l)}, \dots, \det V_{(ln)}^{(l)}. \tag{14}$$

Здесь $\det V_j^{(l)}$ $(j = 1, 2, \dots, (ln))$ является j-м главным минором квадратичной формы

$$D[\bar{z}_1^{(l)}(t)] = \bar{a}'^{(l)}\cdot V^{(l)}\cdot \bar{a}^{(l)} \tag{15}$$

относительно переменных $\bar{a}'^{(l)} = (\bar{a}_1', \bar{a}_2', \dots, \bar{a}'^{(l)})$.

Тогда по известной теореме Якоби [3] можно утверждать, что число перемен знака в последовательности (14) равно числу отрицательных характеристических чисел матрицы $V^{(l)}$. Затем используем свойство характеристических чисел матрицы $V^{(l)}$, состоящее в том, что при $l \to \infty$ они, не возрастая, стремятся к собственным значениям вариационной задачи (7) [4].

Отсюда следует, что для выполнения условия (10) достаточно, чтобы при $l \to \infty$ все члены последовательности (14) были положительны. Полагаем матрицу-функцию $P(t)$ представленной отрезком ряда Фурье

$$P(t) = A_0 + 2 \sum_{i=1}^{m} [A_i \cos it + B_i \sin it], \tag{16}$$

где A_0 — симметрическая положительно определенная постоянная матрица, наибольшее характеристическое число которой обозначим через $\| A_0 \|$, A_i, B_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — постоянные симметрические матрицы.

Укажем структуру симметрической матрицы V, для этого представим ее коагулированной из матриц порядка n. На ее главной диагонали в столбцах $(2j + 1)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, стоят матрицы

$$F_{2j+1} = \left(\frac{2j+1}{2}\right)^2 E - A_0 - A_{2j+1},$$

а в столбцах $(2j + 2)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, находятся матрицы

$$F_{2j+2} = \left(\frac{2j+1}{2}\right)^2 E - A_0 + A_{2j+1}.$$

На первой наддиагонали в столбцах $2j$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, находятся матрицы $-B_{2j-1}$, а в столбцах $(2j + 1)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, стоят матрицы $B_1 - B_{2j}$. На второй наддиагонали в столбцах $(2j + 1)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, находятся матрицы $-A_1 - A_{2j}$, а в столбцах $(2j + 2)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, стоят матрицы $-A_1 + A_{2j}$. На третьей наддиагонали в столбцах $(2j + 2)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, стоят матрицы $-B_1 - B_{2j}$, а в столбцах $(2j + 3)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, находятся матрицы $B_2 - B_{2j+1}$. Остальные наддиагонали строятся следующим образом.

Элемент-матрица каждой последующей четной (нечетной) наддиагонали получается из элемента ближайшей четной (нечетной) наддиагонали, стоящего в той же строке, путем увеличения индексов у составляющих матриц на 1. Матрицу V приведем к верхней треугольной коагулированной матрице V^*, для которой все главные миноры совпадают с главными минорами матрицы V.

На главной диагонали матрицы V^* находятся следующие элемент-матрицы:

$$F_1^* = F_1;$$

$$F_2^* = F_2 - B_1 (F_1^*)^{-1} B_1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_{2j+1}^* = F_{2j+1} - \sum_{k=0}^{j-1} [(A_{j-k} + A_{j-k+1}) (F_{2k+1}^*)^{-1} (A_{j-k} + A_{j-k+1}) +$$
$$+ (B_{j-k} - B_{j-k+1}) (F_{2k+2}^*)^{-1} (B_{j-k} - B_{j-k+1})];$$

$$F_{2j+2}^* = F_{2j+2} - \sum_{k=0}^{j-1} [(B_{j-k} + B_{j-k+1}) (F_{2k+1}^*)^{-1} (B_{j-k} + B_{j-k+1}) +$$

$$+(A_{j-k}-A_{j-k+1})(F^*_{2k+2})^{-1}(A_{j-k}-A_{j-k+1})]-B_{2j+1}(F^*_{2j+1})^{-1}B_{2j+1}$$

для $1 \leqslant j \leqslant m-1$.

Если же $j \geqslant m$, то эти матрицы выражаются следующим образом:

$$F^*_{2j+1}=F_{2j+1}-\sum_{k=0}^{m-1}[A_{m-k}(F^*_{2j+1+k-2m})^{-1}A_{m-k}+B_{m-k}(F^*_{2j+2+k-2m})^{-1}B_{m-k}];$$

$$F^*_{2j+2}=F_{2j+2}-\sum_{k=0}^{m-1}[B_{m-k}(F^*_{2j+1+k-2m})^{-}B_{m-k}+A_{m-k}(F^*_{2j+2+k-2m})^{-1}A_{m-k}].$$

В силу вещественности и симметричности матриц F^*_{2j+1}, F^*_{2j+2}, $j \geqslant 0$, все их характеристические числа вещественны. Обозначим через ϱ_{2j+1}, ϱ_{2j+2} наименьшие характеристические числа соответственно матриц F^*_{2j+1}, F^*_{2j+2}, а какие-либо нижние грани этих чисел обозначим через m_{2j+1}, m_{2j+2}. В качестве нижних граней характеристических чисел матриц F^*_{2j+1}, F^*_{2j+2} $(j \leqslant m-1)$ возьмем наименьшее характеристическое число каждой из этих матриц. В качестве нижних граней характеристических чисел матриц F^*_{2j+1}, F^*_{2j+2} $(j \geqslant m)$ возьмем число, определяющееся формулой:

$$\left.\begin{aligned} m_{2j+1}&=\left(\frac{2j+1}{2}\right)^2-\|A_0\|-\sum_{k=0}^{m-1}\left[\frac{1}{m_{2j+1+k-2m}}\cdot\|A_{m-k}\|^2+\frac{1}{m_{2j+2+k-2m}}\cdot\|B_{m-k}\|^2\right];\\ m_{2j+2}&=\left(\frac{2j+1}{2}\right)^2-\|A_0\|-\sum_{k=0}^{m-1}\left[\frac{1}{m_{2j+1+k-2m}}\cdot\|B_{m-k}\|^2+\frac{1}{m_{2j+2+k-2m}}\cdot\|A_{m-k}\|^2\right],\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где $\|A_j\|$, $\|B_j\|$ — наибольший из модулей характеристических чисел матрицы A_j, B_j.

Если существует такое целое положительное число $s \geqslant m$, для которого выполняется следующее условие:

$$\left.\begin{aligned} &m_{2j+1}>0;\quad m_{2j+2}>0,\quad 0\leqslant j\leqslant s-1,\\ &m_{2j+1}>m_{2j+1-2m};\ m_{2j+2}>m_{2j+2-2m},\ s\leqslant j\leqslant s+m-1,\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

тогда из формул (17) вытекает, что

$$m_{2j+1+2m}\geqslant m_{2j+1};\qquad m_{2j+2+2m}\geqslant m_{2j+2},\qquad s\leqslant j\leqslant s+m-1. \tag{19}$$

Таким образом, при выполнении условий (18) все характеристические числа матриц F^*_{2j+1}, F^*_{2j+2}, $j \geqslant 0$, будут положительны, а значит, все решения уравнения (1) — устойчиво ограниченными.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, О признаках устойчивой ограниченности решений периодических канонических систем, ПММ, т. XIX, вып. 6, М., 1955.
2. А. Ф. Зубова, О колебаниях и устойчивости решений уравнения второго порядка, СМЖ, т. 4, № 5, Новосибирск, 1963.
3. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, ГИТТЛ, М., 1953.
4. С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, М., 1957.

Поступила 16.V 1966 г.,
после переработки — 22.XII 1967 г.

Донецкий политехнический ин-т