УДК 517.946.4

Об одном уравнении параболического типа с кусочно-гладкими коэффициентами

В. Г. Петренко, И. А. Драйцун

В работе рассмотрена нестационарная задача теплообмена для двухслойного тела при переменных коэффициентах и граничных условиях. Задача рассмотрена в одномерной постановке при краевых условиях четвертого рода.

При данных условиях уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \varrho c\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \qquad (1)$$

где

$$\varkappa(x) = \begin{cases}\varkappa_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant a;\\ \varkappa_2(x), & a \leqslant x \leqslant b;\end{cases} \qquad K(x) = \begin{cases}K_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant a;\\ K_2(x), & a \leqslant x \leqslant b;\end{cases}$$

$$T(x, t) = \begin{cases}T_1(x, t), & 0 \leqslant x \leqslant a;\\ T_2(x, t), & a \leqslant x \leqslant b;\end{cases} \qquad \varkappa(x) = \frac{K(x)}{\varrho(x)\, c(x)},$$

решается в области $\{0 \leqslant x \leqslant b,\ t \geqslant 0\}$ при следующих начально-краевых условиях:

$$T(0, t) = At^2e^{-t}, \qquad \frac{\partial T(b, t)}{\partial x} = \frac{F}{K_1}; \qquad (2)$$

$$K_1(x)\frac{\partial T_1}{\partial x} = K_2(x)\frac{\partial T_2}{\partial x}; \qquad -K_1(x)\frac{\partial T_1}{\partial x} = H(T_1 - T_2);$$

$$T(x, 0) = 0. \qquad (3)$$

При такой постановке аналитическое решение данного уравнения может быть найдено для ограниченного числа частных случаев [1, 2]. При помощи степенных разложений можно расширить класс решаемых задач и найти решение в классе голоморфных функций. На основании принципа максимального значения и теоремы существования А. Н. Тихонова решение существует и оно будет единственным.

Так как преобразование Лапласа от негладких функций убывает довольно медленно (и наоборот, медленное убывание $\overline{T}$ порождает негладкость), то решение ищем в классе достаточно гладких функций, по отношению к которым применима трансформация Лапласа [3]. Таким образом преобразование Лапласа переводит задачу (1) — (3) в следующую задачу:

$$\frac{1}{K_1}\frac{dK_1}{dx}\frac{d\overline{T}_1(x, P)}{dx}+\frac{d^2\overline{T}_1(x, P)}{dx^2}-\frac{P}{\varkappa_1}\overline{T}_1(x, P)=0, \qquad 0\leqslant x\leqslant a; \tag{4}$$

$$\frac{1}{K_2}\frac{dK_2}{dx}\frac{d\overline{T}_2(x, P)}{dx}+\frac{d^2\overline{T}_2(x, P)}{dx^2}-\frac{P}{\varkappa_2}\overline{T}_2(x, P)=0, \qquad a\leqslant x\leqslant b \tag{5}$$

при условиях

$$\overline{T}_1(0, P)=\frac{2A}{(P+1)^3}, \qquad \frac{d\overline{T}_2(b, P)}{dx}=\frac{F}{K_1P}; \tag{6}$$

$$K_1(x)\frac{d\overline{T}_1(x, P)}{dx}=K_2(x)\frac{d\overline{T}_2(x, P)}{dx}; \tag{7}$$

$$-K_1(x)\frac{d\overline{T}_1(x, P)}{dx}=H\,[\overline{T}_1(x, P)-\overline{T}_2(x, P)]. \tag{8}$$

Решение в областях $0\leqslant x\leqslant a$ и $a\leqslant x\leqslant b$ ищем формально в виде степенных рядов

$$\overline{T}_1(x, P)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n; \tag{9}$$

$$\overline{T}_2(x, P)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0')^n. \tag{10}$$

Аналогичные степенные представления допускают $K(x)$, $\varrho(x)$, $c(x)$.

Допустим

$$\frac{1}{K_1(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n. \tag{11}$$

Следуя Бертрану, находим уравнение для определения коэффициентов C_n:

$$C_0=\beta_0^{-1}, \qquad C_n=-\beta_0^{-}\sum_{k=1}^{n}\beta_kC_{n-k};$$

$$\frac{1}{\varkappa_1(x)}=\frac{1}{d_0}-\frac{1}{d_0}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}d_k\alpha_{n-k}(x-x_0)^n. \tag{12}$$

Аналогичные разложения получены для $\frac{1}{K_2(x)}$ и $\frac{1}{\varkappa_2(x)}$.

Использовав формулу Коши, найдем произведение функций, представленных степенными разложениями. В результате получим следующие представления:

$$\frac{1}{K_1(x)}\frac{dK_1(x)}{dx}\frac{d\overline{T}_1}{dx}=\frac{1}{\beta_0}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_{n,1}^{(3)}(x-x_0)^n, \tag{13}$$

$$\gamma_{0,1}^{(3)}=\beta_1 a_1; \qquad \gamma_{n,1}^{(3)}=\beta_1(n+1)a_{n+1}+\sum_{i=1}^{n} ia_i\gamma_{n+1-i,1}^{(2)};$$

$$\gamma_{0,1}^{(2)}=\beta_1; \qquad \gamma_{n,1}^{(2)}=(n+1)\beta_{n+1}-\sum_{j=1}^{n}(n+1-j)\beta_{n+1-j}\sum_{k=1}^{j}\beta_k C_{j-k}$$

$$(n=1,2,3,\ldots);$$

$$\frac{1}{\varkappa_1(x)}\overline{T}_1=\frac{1}{d_0}\sum_{n=0}^{\infty}h_{n,1}^{(2)}(x-x_0)^n, \tag{14}$$

$$h_{n,1}^{(2)}=a_n-\sum_{i=1}^{n-1}a_i\sum_{k=1}^{n-i}d_k\alpha_{n-i-k}; \qquad h_{0,1}^{(2)}=a_0;$$

$$\frac{1}{K_2(x)}\frac{dK_2(x)}{dx}\frac{d\overline{T}_2}{dx}=\frac{1}{\sigma_0}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_{n,2}^{(3)}(x-x_0')^n, \tag{15}$$

$$\gamma_{n,2}^{(3)}=\sigma_1(n+1)b_{n+1}+\sum_{i=1}^{n} ib_i\gamma_{n+1-i,2}^{(2)};$$

$$\gamma_{n,2}^{(2)}=(n+1)\sigma_{n+1}-\sum_{j=1}^{n}(n+1-j)\sigma_{n+1-j}\sum_{k=1}^{j}\sigma_k\psi_{n-k};$$

$$\frac{1}{\varkappa_2(x)}\overline{T}_2=\frac{1}{\mu_0}\sum_{n=0}^{\infty}h_{n,2}^{(2)}(x-x_0')^n, \tag{16}$$

$$h_{n,2}^{(2)}=b_n-\sum_{i=0}^{n-1}b_i\sum_{k=1}^{n-i}\mu_k\tau_{n-i-k}, \qquad h_{0,2}^{(2)}=b_0 \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Заменим операторные уравнения и краевые условия полученными разложениями. Из уравнений (6) определяем

$$a_0=\frac{2A}{(P+1)^3}; \qquad b_1=\frac{F}{K_1P}. \tag{17}$$

Из условий сопряжения получим соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты a_n и b_n на границе сопряжения

$$-H\left[a_n-b_n(1-\lambda)^n\right]=(1-\lambda)^n\sum_{i=1}^{n+1} ib_i\sigma_{n+1-i} \qquad (n=0,1,2,3,\ldots). \tag{18}$$

Из последнего соотношения при $n=0$ находим a_1 и b_0. Из (18) и разложений уравнений в степенные ряды определяем b_2.

Остальные коэффициенты a_n и b_n определим по рекуррентным соотношениям

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\frac{P}{d_0} b_n (1-\lambda)^n + \frac{1}{\beta_0}\sum_{i=1}^{n} ia_i \sum_{j=1}^{n+1-i}(n+2-i-j)\beta_{n+2-i-j}\times\right.$$

$$\times\sum_{k=1}^{j}\beta_k C_{j-k} - \frac{P(1-\lambda)^n}{Hd_0}\sum_{i=1}^{n+1} ib_i\sigma_{n+1-i} - \frac{P}{d_0}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i} a_i d_k \alpha_{n-i-k} -$$

$$\left.-\frac{1}{\beta_0}\sum_{i=1}^{n} ia_i(n+2-i)\beta_{n+2-i}\right] - \frac{\beta_1}{n+2}a_{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots); \qquad (19)$$

$$b_{n+2} = \frac{H[a_n - b_n(1-\lambda)^n]\sigma_1}{\sigma_0^2(1-\lambda)^n(n+1)(n+2)} + \left(\sigma_0\left\{\frac{\sigma_0 P}{\mu_0}\left[b_n - \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i} b_i\mu_k\tau_{n-i-k}\right] -\right.\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n} ib_i(n+2-i)\sigma_{n+2-i} + \sum_{i=1}^{n} ib_i\sum_{j=1}^{n+1-i}(n+2-i-j)\sigma_{n+2-i-j}\sum_{k=1}^{j}\sigma_k\psi_{j-k}\right\} +$$

$$\left.+\sigma_1\sum_{k=1}^{n} ib_i\sigma_{n+1-i}\right)/\sigma_0^2(n+1)(n+2) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (20)$$

В том случае, когда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+l}}$, радиус сходимости рядов (19) и (20) определялся численно на ЭЦВМ типа М-20, если просчитывать достаточное количество членов последовательности [4]

$$R_n^l = \frac{a_n}{a_{n+l}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots; \ l = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (21)$$

до такого значения n включительно, начиная с которого будут выполняться равенства

$$\frac{a_n}{a_{n+l}} = \frac{a_{n+l}}{a_{n+2l}} = \frac{a_{n+2l}}{a_{n+3l}} = \ldots = \text{const} = R^l; \qquad (22)$$

$$\frac{b_n}{b_{n+k}} = \frac{b_{n+k}}{b_{n+2k}} = \frac{b_{n+2k}}{b_{n+3k}} = \ldots = \text{const} = R^k. \qquad (23)$$

Вычисления были выполнены для больших значений n.

Для восстановления оригинала необходимо найти значения изображения $\overline{T}(x, P)$ при равноотстоящих значениях $P = (2k+1)\varphi$, где $\varphi > 0$, а $k = 0, 1, 2, \ldots$ Введем преобразование $e^{-st} = \cos\Theta$

$$\overline{T}(x, P) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\Theta)\cos^{2k}\Theta\sin\Theta d\Theta = S\overline{T}[x, (2k+1)S]. \qquad (24)$$

Здесь $\Phi(\Theta) = \left(-\frac{1}{S}\ln\cos\Theta\right)$.

Так как решение ищется в классе комплекснозначных локально сум мируемых функций, то справедливо представление

$$\Phi(\Theta) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \sin(2m+1)\Theta. \tag{25}$$

Коэффициенты C_m могут быть найдены при помощи равенств

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2l+1)\Theta \sin(2\mu+1)\Theta d\Theta = \begin{cases} 0, & l \neq \mu, \\ \frac{\pi}{4}, & l = \mu. \end{cases}$$

Заменив ядро $\cos^{2k}\Theta\sin\Theta$ и функцию $\Phi(\Theta)$ разложениями по синусам получим равенство

$$\left[\binom{2m}{m} - \binom{2m}{m-1}\right] C_0 + \ldots + \left[\binom{2m}{k} - \binom{2m}{k-1}\right] C_{m-k} + \ldots +$$

$$+ C_m = \frac{4^{m+1}}{\pi} S\overline{T}[x, (2m+1)S]. \tag{26}$$

Запишем правило получения коэффициентов C_l в матричном виде

$$A \cdot C = Y. \tag{27}$$

Здесь A — матрица (треугольная) коэффициентов при C_l; C — матрица-столбе элементов C_l; Y — матрица-столбец элементов y_n, где

$$y_n = \frac{4^{m+1}}{\pi} S\overline{T}[x, (2m+1)S] \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Умножая обе части равенства (27) слева на A^{-1}, получим

$$C = A^{-1} \cdot Y. \tag{28}$$

Итак, функция $\Phi(\Theta)$ после определения коэффициентов C восстанавли вается при помощи (25).

Если 2π-периодическая функция $\Phi(\Theta)$ имеет непрерывную r-ю прои водную, то из теории рядов Фурье известно, что если W представляе собой класс функций $\Phi(\Theta)$, обладающих перечисленными свойствами, т для $\Psi_{V_q}(W, x)$ справедливо асимптотическое равенство [5]

$$\Psi_{V_q}(W, x) = Q\left[\frac{4}{\pi^2}\frac{\lg q}{q^r} + \frac{p_{q,r}}{q^r}\right], \tag{29}$$

где $V_q(T, x)$ — сумма q-го порядка ряда Фурье (25), Ψ_q — верхняя гран абсолютных величин уклонений функций T от их сумм Фурье $V_q(T, x$ в точке x, распространенная на класс функций W.

Контрольные вычисления по алгоритмам были выполнены на ЭЦВ типа М-20.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Кaслоу, Д. Егер, Теплопроводность твердых тел, «Наука», М., 1964.
2. А. В. Лыков, Теория теплопроводности, «Высшая школа», М., 1967.
3. О. А. Ладыженская и др., Линейные и квазилинейные уравнения парабол ческого типа, «Наука», М., 1967.
4. П. Ф. Фильчаков, Про один ефективний метод розв'язання крайових задач дл нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, ДАН УРСР, сер. А, № 2, 1967.

5. В. И. Крылов, Н. С. Скобля, Об условиях сходимости и оценке погрешности приближенного обращения преобразования Лапласа при помощи рядов Фурье, ДАН БССР, Минск, т. 11, № 9, 1967.

Поступила 31.VII 1967 г.,
после переработки — 7.V 1968 г.
Институт математики АН УССР