УДК 517.9:532.51

Интеграл уравнений Навье—Стокса для пространственного движения вязкой несжимаемой жидкости

К. П. Страшинина

Найдем интеграл уравнений Навье — Стокса для установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости. Воспользуемся уравнениями движения жидкости [1]

$$
\begin{aligned}
v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 v_x, \\
v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v_y, \\
v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_z,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где v_x, v_y и v_z — проекции вектора скорости жидкости на оси координат; p, ϱ и ν — соответственно давление, плотность и кинематический коэффициент вязкости; U — потенциал массовых сил.

Путем перекрестного дифференцирования уравнений (1) легко получить

$$
\begin{aligned}
&\nu \left(\frac{\partial \nabla^2 v_z}{\partial y} - \frac{\partial \nabla^2 v_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial v_z}{\partial x} - \\
&- \frac{\partial v_y}{\partial y}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial v_z}{\partial z}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + v_x \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial z} - \right. \\
&\left. - \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial y} \right) + v_y \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) + v_z \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial z} \right) = 0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nu \left(\frac{\partial \nabla^2 v_x}{\partial z} - \frac{\partial \nabla^2 v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\frac{\partial v_x}{\partial y} - \\
&- \frac{\partial v_z}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + v_x \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} - \right. \\
&\left. - \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial z} \right) + v_y \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial z} \right) + v_z \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = 0,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nu \left(\frac{\partial \nabla^2 v_x}{\partial y} - \frac{\partial \nabla^2 v_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial v_y}{\partial y}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial x}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \\
&+ \frac{\partial v_z}{\partial x}\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\frac{\partial v_x}{\partial z} + v_x \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} \right) + v_y \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} - \right. \\
&\left. - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) + v_z \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial z} \right) = 0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Из уравнений (1)

$$d\left(\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\varrho}-U\right)=\nu\left(\nabla^2 v_x dx+\nabla^2 v_y dy+\nabla^2 v_z dz\right)+2\Delta, \qquad (5$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ v_x & v_y & v_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix},$$

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right), \quad \omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \quad \omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right),$$

ω_x, ω_y и ω_z — проекции вектора угловой скорости жидкости на оси координат

Равенства (2) — (4) являются условиями того, что правая часть уравнения (5) является полным дифференциалом некоторой функции F, частные производные которой соответственно равны

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\nu\nabla^2 v_x+2\left(v_y\omega_z-v_z\omega_y\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\nu\nabla^2 v_y+2\left(v_z\omega_x-v_x\omega_z\right), \qquad (6$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\nu\nabla^2 v_z+2\left(v_x\omega_y-v_y\omega_x\right).$$

Поэтому, интегрируя уравнение (5), получим

$$\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\varrho}-U-F=C, \qquad (7$$

где C — постоянная интегрирования.

При $\Delta=0$, т. е. при движении жидкости вдоль линий тока, траекторий вихревых и винтовых линий, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\nu\nabla^2 v_x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=\nu\nabla^2 v_y, \quad \frac{\partial F}{\partial z}=\nu\nabla^2 v_z, \quad \frac{\partial\nabla^2 v_x}{\partial y}=\frac{\partial\nabla^2 v_y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\nabla^2 v_x}{\partial z}=\frac{\partial\nabla^2 v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial\nabla^2 v_z}{\partial y}=\frac{\partial\nabla^2 v_y}{\partial z}. \qquad (8$$

Воспользовавшись равенствами (8) и уравнением неразрывности [1]

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0,$$

найдем дифференциальные уравнения для определения проекций скорости v_x, v_y и v_z

$$\nabla^2\left(\nabla^2 v_x\right)=0, \quad \nabla^2\left(\nabla^2 v_y\right)=0, \quad \nabla^2\left(\nabla^2 v_z\right)=0. \qquad (9$$

Решение для проекции скорости v_x ищем в виде

$$v_x=e^{\alpha x+\beta y+\gamma z}.$$

Получим

$$\gamma^4+2\gamma^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)+\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2=0,$$

$$\gamma_{1,2}=i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad \gamma_{3,4}=-i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (9) для проекции скорости v_x имеет вид

$$v_x = \sum [Ae^{\alpha x+\beta y+i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z} + Be^{\alpha x+\beta y-i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z} +$$

$$+ z (Ce^{\alpha x+\beta y+i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z} + De^{\alpha x+\beta y-i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z})].$$

Так как проекции скорости v_y и v_z удовлетворяют тому же дифференциальному уравнению, что и v_x, то их выражения аналогичны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, Физматгиз, М., 1963.

Поступила 10.X 1967 г.
Киевский институт инженеров гражданской авиации