УДК 519.48

Главные примарные идеалы кольца функций, регулярных в круге и дифференцируемых на его границе

Л. В. Шамраева

Пусть A_n — пространство всех функций комплексного переменного ζ, регулярных в круге $|\zeta| < 1$ и непрерывных вместе со своими производными до n-го порядка включительно на окружности $|\zeta| = 1$, наделенное нормой:

$$\| f \| = \sum_{k=0}^{n} \frac{\max\limits_{|\zeta| \leq 1} | f^{(k)}(\zeta) |}{k!}. \tag{1}$$

Нетрудно убедиться, что A_n — нормированное кольцо (с единицей $f(\zeta) \equiv 1$) относительно обычного умножения, при этом

$$\| fg \| \leqslant \| f \| \cdot \| g \| \quad (f, g \in A_n). \tag{2}$$

При $n = 0$ получаем кольцо A.

Легко доказать теорему о максимальных идеалах кольца A_n.

Теорема 1. *Каждый максимальный идеал кольца A_n — совокупность всех функций из A_n, обращающихся в нуль в какой-либо фиксированной точке круга $|\zeta| \leqslant 1$.*

Для максимального идеала M_{ζ_0}, отвечающего внутренней точке ζ_0 круга, легко указать все, содержащиеся в нем, примарные идеалы.

Теорема 2. *Совокупность функций $f(\zeta) \in A_n$, обращающихся в нуль в точке ζ_0 ($|\zeta_0| < 1$) вместе со всеми своими производными до k-го порядка включительно ($0 \leqslant k \leqslant n$), является примарным идеалом. Иных примарных идеалов, принадлежащих максимальному идеалу M_{ζ_0}, не существует.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству для кольца A [1, стр. 263].

Легко видеть, что для каждого максимального идеала M_{ζ_0}, соответствующего граничной точке $|\zeta_0| = 1$, существует цепочка примарных идеалов:

$$M_{\zeta_0} = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots \supset I_n,$$

где для I_k выполнено

$$f(\zeta_0) = f'(\zeta_0) = \ldots = f^{(k)}(\zeta_0) = 0, \quad |\zeta_0| = 1, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Основным результатом настоящей работы является описание всех главных примарных идеалов, содержащихся в I_n. Положим $\zeta_0 = 1$.

Теорема 3. *Функции $u_\alpha(\zeta) = (\zeta - 1)^{2n+1} \exp \dfrac{\alpha}{\zeta - 1}$ $(0 \leqslant \alpha < \infty)$ принадлежат кольцу A_n и обращаются в нуль вместе со своими производ-*

ными до n-го порядка включительно в точке $\zeta = 1$. Они порождают различные замкнутые идеалы кольца A_n; все эти идеалы I^α являются примарными, содержащимися в I_n ($I^0 = I_n$). Обратно, каждая функция $u(\zeta) \in A_n$, обращающаяся в нуль вместе со своими n производными в точке $\zeta = 1$ и отличная от нуля в других точках, порождает главный идеал $I[u]$, совпадающий с одним из этих идеалов I^α.

Доказательство первой части теоремы по существу не отличается от аналогичного доказательства Г. Е. Шилова [2] для кольца A.

Для доказательства второй части теоремы устанавливаются две леммы.

Лемма 1. Пусть $u(\zeta)$ и $v(\zeta) \in A_n$. Кроме того,

$$u(\zeta) \neq 0 \quad \text{для} \quad |\zeta| \leqslant 1, \quad \zeta \neq 1, \quad u^{(k)}(1) = 0, \quad v^{(k)}(1) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Если $\zeta = 1$ является нулем без логарифмического вычета функции $u(\zeta)$ [3], *то любому $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие функцию $\omega(\zeta) \in A_n$, для которой*

$$\| u\omega - v \|_{A_n} < \varepsilon.$$

Наметим доказательство этой леммы.

Для заданной функции $u(\zeta) \in A_n$ рассмотрим гармоническую функцию $f(\zeta) = -\ln|u(\zeta)|$.

Так как $\zeta = 1$ — нуль без логарифмического вычета функции $u(\zeta)$, то

$$u(\zeta) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta} f(e^{i\theta})\,d\theta + iC\right).$$

Положим

$$\omega_{\delta,\gamma}(\zeta) = v(\zeta)\exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} \frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta} f(e^{i\theta})\,d\theta - iC\right)\Phi_\gamma(e^{-i\delta}\zeta)\,\Phi_\gamma(e^{i\delta}\zeta),$$

где

$$\Phi_\gamma(z) = \left(\frac{z-1}{z-1-\gamma}\right)^{2n+1}. \tag{3}$$

Дальше доказывается, что

$$\| u(\zeta)\,\omega_{\delta,\gamma}(\zeta) - v(\zeta)\,[\Phi_\gamma(\zeta)]^2 \|_{A_n} \to 0$$

при $\delta \to 0$, γ — фиксированном, а затем, что

$$\| v(\zeta)\,[\Phi_\gamma(\zeta)]^2 - v(\zeta) \|_A \to 0 \quad \text{при} \quad \gamma \to 0. \tag{4}$$

Из этих двух предельных соотношений следует заключение леммы.

Лемма 2. *Если $u(\zeta) \in A_n$ и имеет логарифмический вычет $\alpha > 0$ в точке $\zeta = 1$, то*

$$u_1(\zeta) = u(\zeta)\exp\frac{\alpha}{1-\zeta}$$

также принадлежит кольцу A_n.

Доказательство этой леммы опирается на два утверждения.

1. Если $u(\zeta) \in A_n$ и имеет логарифмический вычет $\alpha > 0$ в точке $\zeta = 1$, то

$$u'(\zeta), \quad u''(\zeta), \ldots, u^{(n)}(\zeta)$$

также имеют логарифмические вычеты в точке $\zeta = 1$ не меньшие, чем α.

2. Если $u(\zeta) \in A_n$ и имеет логарифмический вычет $\alpha > 0$ в точке $\zeta = 1$, то

$$u(\zeta) = o(|\zeta - 1|^{2n}) \quad (\zeta \to 1).$$

Переходим к доказательству теоремы.

Пусть

$$u(\zeta) = \exp\frac{\alpha}{\zeta - 1} u_1(\zeta) \in A_n$$

причем $u_1(\zeta)$ не имеет логарифмического вычета в точке $\zeta = 1$.

По лемме 2 $u_1(\zeta) \in A_n$, а по лемме 1 существует функция $\omega(\zeta)$ такая, что

$$\| u_1(\zeta)\omega(\zeta) - (\zeta - 1)^{2n+1} \|_{A_n} < \varepsilon$$

($\varepsilon > 0$ произвольно).

Рассмотрим функцию, принадлежащую $I[u]$:

$$u(\zeta)\Phi_\gamma(\zeta)\omega(\zeta) = \exp\frac{\alpha}{\zeta - 1}\Phi_\gamma(\zeta) u_1(\zeta)\omega(\zeta) \qquad (\gamma > 0).$$

Так как

$$\exp\frac{\alpha}{\zeta - 1}\Phi_\gamma(\zeta) \in A_n,$$

то

$$\left\| \exp\frac{\alpha}{\zeta - 1}\Phi_\gamma(\zeta) u_1(\zeta)\omega(\zeta) - \exp\frac{\alpha}{\zeta - 1}\Phi_\gamma(\zeta)(\zeta - 1)^{2n+1} \right\|_{A_n} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \left\| \exp\frac{\alpha}{\zeta - 1}\Phi_\gamma(\zeta) \right\|_{A_n}.$$

Таким образом, при всяком $\gamma > 0$

$$(\zeta - 1)^{2n+1}\exp\frac{\alpha}{\zeta - 1}\Phi_\gamma(\zeta) \in I[u].$$

Переходя к пределу при $\gamma \to 0$ и пользуясь предельным соотношением типа (4), получим

$$(\zeta - 1)^{2n+1}\exp\frac{\alpha}{\zeta - 1} \in I[u].$$

Следовательно, $I^\alpha \subset I[u]$.

Но и обратно, идеал $I^\alpha = I\left[(\zeta - 1)^{2n+1}\exp\frac{\alpha}{\zeta - 1}\right]$ содержит любую функцию из A_n, имеющую логарифмический вычет не меньший, чем α. Следовательно, $I[u] = I^\alpha$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца, Физматгиз, М., 1960.
2. Г. Е. Шилов, Об одном граничном свойстве аналитических функций, Уч. зап. МГУ, сер. матем., 146, вып. 3, 1949.
3. T. Carleman, Les fonctions quasi-analytiques, Paris, 1926.

Поступила 25.XI 1968 г.

Институт математики АН УССР