УДК 517.917

Движение маятника, точка подвеса которого подвержена действию периодических толчков

Т. Г. Стрижак

В 20-х годах в немецкой технической литературе появилась серия статей К. Клоттера и его учеников об «Auswanderungspfenomen». Суть этого явления состоит в том, что в приборах (в частности, маятниковых, контролирующих положение вертикали) наблюдается погрешность в измерениях, вызванная, как выяснилось, действием вибрации, которая передается через основание к прибору.

Оказывается, если точка подвеса маятника подвержена вибрациям в вертикальном и горизонтальном направлениях, то маятник совершает устойчивые колебания вокруг некоторой оси, смещенной относительно истинной вертикали на некоторый угол Θ.

В настоящей статье мы исследуем влияние периодических ударов, действующих на точку подвеса маятника, на устойчивость последнего.

Известно, что исследование многих реальных систем при естественных упрощающих предположениях можно свести к исследованию математического маятника с толчками.

Рассмотрим колебания маятника с движущейся точкой подвеса при условии, что движение точки подвеса происходит под действием периодически повторяющихся ударов и действие ударов сказывается на точке подвеса в увеличении ее скорости на величину, постоянную по модулю и чередующуюся по знаку. Уравнение движения маятника имеет вид

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2}+\lambda\frac{d\Theta}{dt}+\frac{1}{l}\left(g-\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\sin\Theta=0, \tag{1}$$

где $y=\varphi(t)$ — вертикальное перемещение точки подвеса, Θ — угол отклонения маятника от нижнего положения рановесия, λ — коэффициент затухания.

Движение точки подвеса определяется уравнением:

$$\begin{gathered}\frac{d^2y}{dt^2}=0, \quad \nu t\neq 2\pi l, \quad l=0,1,2,\ldots,\\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{\nu t=4l\pi+0}-\left.\frac{dy}{dt}\right|_{\nu t=4l\pi-0}=E,\\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{\nu t=2(2l+1)\pi+0}-\left.\frac{dy}{dt}\right|_{\nu t=2(2l+1)\pi-0}=-E,\end{gathered} \tag{2}$$

где ν — частота ударов, E — положительная величина, равная изменению скорости точки при ударе. Используя арифметику над дельта-функцией Дирака, изложенную в [1], перепишем уравнение (2) в виде

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{E\nu}{2\pi}\left[\sum_{1}^{\infty}\cos k\frac{\nu t}{2}-\sum_{1}^{\infty}\cos k\left(\frac{\nu t}{2}-\pi\right)\right], \tag{3}$$

откуда находим закон движения точки подвеса

$$y=\frac{2E}{\pi\nu}\left[-\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos k\frac{\nu t}{2}}{k^2}+\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos k\left(\frac{\nu t}{2}-\pi\right)}{k^2}\right]+ct+c_0 \tag{4}$$

Таким образом, относительно равномерного движения $y_0=ct+c_0$ движение точки подвеса есть вибрация по закону

$$\varphi\left(\frac{\nu t}{2}\right)=\frac{2E}{\pi\nu}\left[-\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos k\frac{\nu t}{2}}{k^2}+\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos k\left(\frac{\nu t}{2}-\pi\right)}{k^2}\right]. \tag{5}$$

Теперь уравнение движения маятника принимает вид

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2}+\lambda\frac{d\Theta}{dt}+\frac{1}{l}\left\{g-\frac{E\nu}{2\pi}\left[\sum_{2}^{\infty}\cos k\frac{\nu t}{2}-\sum_{1}^{\infty}\cos k\left(\frac{\nu t}{2}-\pi\right)\right]\right\}\sin\Theta=0. \tag{6}$$

Решим уравнение (6).

Сначала введем безразмерное время

$$\tau=\frac{\nu t}{2}.$$

Уравнение (6) примет вид

$$\frac{d^2\Theta}{d\tau^2}+\frac{2\lambda}{\nu}\frac{d\Theta}{d\tau}+\left\{\frac{4g}{l\nu^2}+\frac{2E}{\pi l\nu}\left[\sum_1^\infty\cos k\tau-\sum_1^\infty\cos k(\tau-\pi)\right]\right\}\sin\Theta=0. \quad (7)$$

Затем введем замену переменных с помощью формул:

$$\Theta=\varphi;$$

$$\frac{d\Theta}{d\tau}=\frac{2E}{\pi l\nu}\Omega+\frac{2E}{\pi l\nu}\left[\sum_1^\infty\frac{\sin k\tau}{k}-\sum_1^\infty\frac{\sin k(\tau-\pi)}{k}\right]\sin\varphi. \quad (8)$$

В новых переменных φ и Ω уравнение (7) запишется в виде системы двух уравнений:

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{2E}{\pi l\nu}\left[\Omega+\left(\sum_1^\infty\frac{\sin k\tau}{k}-\sum_1^\infty\frac{\sin k(\tau-\pi)}{k}\right)\sin\varphi\right];$$

$$\frac{d\Omega}{d\tau}=-\frac{2E}{\pi l\nu}\left\{\left[\sum_1^\infty\frac{\sin k\tau}{k}-\sum_1^\infty\frac{\sin k(\tau-\pi)}{k}\right]\Omega\cos\varphi+\right.$$

$$+\left[\sum_1^\infty\frac{\sin k\tau}{k}-\sum_1^\infty\frac{\sin k(\tau-\pi)}{k}\right]^2\frac{\sin 2\varphi}{2}+\frac{\lambda\pi l}{E}\Omega+ \quad (9)$$

$$\left.+\left[\frac{\lambda\pi l}{E}\left(\sum_1^\infty\frac{\sin k\tau}{k}-\sum_1^\infty\frac{\sin k(\tau-\pi)}{k}\right)+\frac{g\pi^2 l}{E^2}\right]\sin\varphi\right\}.$$

Учитывая, что

$$\sum_1^\infty\frac{\sin k\tau}{k}-\sum_1^\infty\frac{\sin k(\tau-\pi)}{k}=2\sum_1^\infty\frac{\sin(2k-1)}{2k-1}\tau, \quad (10)$$

систему уравнений (9) запишем в виде:

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{2}{\pi}\varepsilon\left[\Omega+2\sum_1^\infty\frac{\sin(2k-1)\tau}{2k-1}\sin\varphi\right];$$

$$\frac{d\Omega}{d\tau}=-\frac{2}{\pi}\varepsilon\left\{2\sum_1^\infty\frac{\sin(2k-1)\tau}{2k-1}\Omega\cos\varphi+2\left(\sum_1^\infty\frac{\sin(2k-1)\tau}{2k-1}\right)\sin 2\varphi+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda\pi l}{E}\Omega+\left[\frac{g\pi l}{E^2}+\frac{4\lambda\pi l}{E}\sum_1^\infty\frac{\sin(2k-1)\tau}{2k-1}\right]\sin\varphi\right\}, \quad (11)$$

где $\varepsilon=\frac{E}{l\nu}\ll 1$ — безразмерный малый параметр.

Усреднив правые части уравнений (11) по времени, придем к уравнениям первого приближения:

$$\frac{d\varphi_0}{d\tau} = \frac{2}{\pi}\,\varepsilon\Omega_0;$$

$$\frac{d\Omega_0}{d\tau} = -\frac{2}{\pi}\,\varepsilon\left\{\sum_1^\infty \frac{1}{(2k-1)^2}\sin 2\varphi_0 + \frac{\lambda\pi l}{E}\,\Omega_0 - \frac{g\pi^2 l}{E^2}\sin\varphi_0\right\}. \tag{12}$$

Эти два уравнения эквивалентны одному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2\varphi_0}{d\tau^2} + \varepsilon\,\frac{2\pi l\lambda}{E}\,\frac{d\varphi_0}{d\tau} + \varepsilon^2\left[\frac{4gl}{E^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_1^\infty \frac{1}{(2k-1)^2}\cos\varphi_0\right]\sin\varphi_0 = 0, \tag{13}$$

которое является уравнением колебаний системы, подобной маятнику с неподвижной точкой подвеса, у которой «восстанавливающая сила» пропорциональна

$$\left[\frac{4gl}{E^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_1^\infty \frac{1}{(2k-1)^2}\cos\varphi_0\right]\sin\varphi_0.$$

Таким образом, в первом приближении колебания маятника определяются выражением

$$\Theta(\tau) = \varphi_0(\tau). \tag{14}$$

Непосредственно из (14) следует, что это уравнение допускает квазистатическое решение $\varphi_0 = \pi$, соответствующее верхнему положению равновесия маятника.

Для исследования устойчивости рассмотрим малые отклонения $\delta\varphi_0 = \varphi - \pi$ от этого положения. Уравнение в вариациях для $\delta\varphi_0$ примет вид

$$\frac{d^2\delta\varphi_0}{d\tau^2} + \varepsilon\,\frac{2\pi\lambda l}{E}\,\frac{d\delta\varphi_0}{d\tau} - \varepsilon^2\left[\frac{4gl}{E^2} - \frac{8}{\pi^2}\sum_1^\infty \frac{1}{(2k-1)^2}\right]\delta\varphi_0 = 0. \tag{15}$$

Поскольку $\frac{2\lambda\pi l}{E} > 0$ всегда, то условие устойчивости имеет вид:

$$\frac{4gl}{E^2} - \frac{8}{\pi^2}\,c < 0, \qquad c = \sum_1^\infty \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \tag{16}$$

отсюда

$$E < 2\sqrt{gl}$$

при условии, что ν — большое.

Сравним это с условием устойчивости для случая, когда точка подвеса маятника вибрирует с большой частотой и малой амплитудой

$$a\omega > \sqrt{2}\sqrt{gl},$$

ω — частота вибрации, a — амплитуда. Таким образом, если точка подвеса маятника подвержена действию периодически повторяющихся толчков, то маятник находится в равных условиях с тем, точка подвеса которого движется по закону $y = a\sin\omega t$, где a — малая амплитуда, ω — большая частота.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Самойленко, Некоторые вопросы исследования дифференциальных уравнений с нерегулярной правой частью, Bulletinul Institutului Politehnie din Iasi, **XI**, 3, 4, 1965.

Поступила 24.XII 1968 г.
Институт математики АН УССР