УДК 517.948.33

О приближенном решении одного класса интегральных уравнений

В. Ю. Дидык

В данной статье рассматриваются интегральные уравнения типа Фредгольма — Вольтерра второго рода. Приближенные решения таких уравнений строятся методом, который по своей идее близок к методу полос [1], а также методом, предложенным в статье [2] для приближенного решения линейных операторных уравнений с полностью непрерывными операторами.

1. Пусть в некотором банаховом пространстве задан класс уравнений

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} P_i(x) \int_a^b Q_i(s) y(s)\, ds + \int_a^x K(x, s) y(s)\, ds \tag{1}$$

с неизвестной функцией $y(x)$, для которых выполняются условия существования и единственности решения при произвольной функции $f(x)$. Как приближенное решение уравнения (1) принимаем функцию

$$y_k(x) = g_k(x) + \sum_{i=1}^{m} C_i^{(k)} u_i^{(k)}(x), \tag{2}$$

где

$$C_i^{(k)} = \int_a^b Q_i(x) y_k(x)\, dx \quad (i = \overline{1, m}), \tag{3}$$

а функции $g_k(x)$, $u_i^{(k)}(x)$ определяются из рекуррентных соотношений·

$$g_0(x) = f(x); \quad g_k(x) = f(x) + \int_a^x K(x, s) g_{k-1}(s)\, ds;$$

$$u_i^{(0)}(x) = P_i(x); \quad u_i^{(k)}(x) = P_i(x) + \int_a^x K(x, s) u_i^{(k-1)}(s)\, ds, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Если функцию (2) подставить в равенство (3), то для определения чисел $C_i^{(k)}$ получим систему линейных алгебраических уравнений

$$C_j^{(k)} = \int_a^b Q_j(x) g_k(x)\, dx + \sum_{i=1}^{m} C_i^{(k)} \int_a^b Q_j(x) u_i^{(k)}(x)\, dx \quad (j = \overline{1, m}). \tag{5}$$

2. Сходимость и оценки погрешности метода в пространстве $C[a,b]$. Будем считать, что:

1°. Заданные функции $f(x)$, $P_i(x)$ $(i=\overline{1,m})$ являются непрерывными на $[a,b]$.

2°. Функция $K(x,s)$ является ограниченным ядром первого рода (непрерывна почти всюду) в области $D: a \leqslant s, x \leqslant b$.

3°. Функции $Q_i(x)$ $(i=\overline{1,m})$ — ограниченные и непрерывные почти всюду на $[a,b]$.

Легко видеть, что уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$y(x) = g(x) + Ay(x), \tag{6}$$

где

$$g(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x K_n(x,s) f(s)\,ds = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} K^n f(x),$$

$$Ay(x) = \sum_{i=1}^{m} u_i(x) \int_a^b Q_i(s)\, y(s)\,ds,$$

$$u_i(x) = P_i(x) + \sum_{n=1}^{\infty} K^n P_i(x) \quad (i=\overline{1,m}).$$

В силу однозначной разрешимости уравнения (1) из (6) получаем

$$y(x) = (I-A)^{-1} g(x), \tag{7}$$

где I — единичный оператор.

Перепишем равенство (2) в виде

$$y_k(x) = g_k(x) + A_k y_k(x), \tag{8}$$

где

$$A_k y(x) = \sum_{i=1}^{m} u_i^{(k)}(x) \int_a^b Q_i(s)\, y(s) ds.$$

Очевидно, что при достаточно больших k уравнение (8) эквивалентно уравнению

$$y_k(x) = (I-A_k)^{-1} g_k(x). \tag{9}$$

Известно, что всякое решение уравнения (1) удовлетворяет уравнению

$$y(x) = g_k(x) + A_k y(x) + K^{k+1} y(x), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

которое при достаточно больших k эквивалентно уравнению (1). Применяя к (10) оператор $(I-A_k)^{-1}$, получим

$$y(x) = (I-A_k)^{-1} g_k + (I-A_k)^{-1} K^{k+1} y(x). \tag{11}$$

Если $y^*(x)$ — точное решение уравнения (1), а $y_k(x)$ — приближенное решение, определенное по формуле (9), то

$$y^*(x) - y_k(x) = (I-A_k)^{-1} K^{k+1} y^*(x). \tag{12}$$

Тогда из (12) получаем

$$\| y^*(x) - y_k(x) \| \leqslant \| (I-A_k)^{-1} K^{k+1} \| \, \| y^*(x) \| = \varrho_k \| y^*(x) \|. \tag{13}$$

Из условия 2, как известно, вытекает оценка

$$\| K^k \| \leqslant \frac{M^k (b-a)^k}{k!}, \tag{14}$$

где $M \geqslant \sup_D |K'(x, s)|$, а потому при $k \to \infty$ величина $\varrho_k \to 0$. Следовательно, последовательность $\{y_k(x)\}$ сходится по норме (а для данного пространства — равномерно) к решению $y^*(x)$ уравнения (1).

Установим некоторые оценки погрешностей метода. Если apriori известная величина δ^* такая, что

$$\|y^*(x)\| \leqslant \delta^*,$$

то оценка погрешности определяется неравенством

$$\|y^*(x) - y_k(x)\| \leqslant \varrho_k \delta^*. \tag{15}$$

Так как при достаточно больших k ϱ_k может быть как угодно малым числом, то из неравенства (13) непосредственно получаем оценку погрешности

$$\| y^*(x) - y_k(x) \| \leqslant \frac{\varrho_k}{1 - \varrho_k} \| y_k(x)\|. \tag{16}$$

Однако в общем случае не удается выписать оператор $(I - A_k)^{-1}$ в явном виде. Потому указанные выше оценки погрешности не всегда эффективны.

Если оператор A_k удовлетворяет условию $\|A_k\| < 1$, то, как известно, ϱ_k можно оценить

$$\varrho_k \leqslant \frac{\| K^{k+1}\|}{1 - \|A_k\|} = q_k. \tag{17}$$

Выведем некоторые оценки погрешности, исходя из того, что оператор A_k вырожденный. В этом случае уравнение (6) эквивалентно системе алгебраических уравнений вида

$$C_j = \int_a^b Q_j(x)\, g(x)\, dx + \sum_{i=1}^m C_i \int_a^b Q_j(x)\, u_i(x) dx \quad (j = \overline{1, m}), \tag{18}$$

где $C_i = \int_a^b Q_i(x)\, y(x)\, dx$. В силу однозначной разрешимости уравнения (1) матрица B системы (18) невырожденная.

Очевидно, что при $k \to \infty$ матрица B_k системы (5) имеет своим пределом матрицу B, а потому при достаточно больших k будут существовать ограниченные матрицы B_k^{-1}. Заметим также, что уравнение (10) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} C_j = \int_a^b Q_j(x)\, g_k(x)\, dx + \sum_{i=1}^m C_i \int_a^b Q_j(x)\, u_i^{(k)}(x)\, dx + \\ + \int_a^b Q_j(x)\, K^{k+1} y(x)\, dx \quad (j = \overline{1, m}). \end{aligned} \tag{19}$$

Теперь из (5) и (19) имеем систему

$$\begin{aligned} C_j^* - C_j^{(k)} = \sum_{i=1}^m (C_i^* - C_i^{(k)}) \int_a^b Q_j(x)\, u_i^{(k)}(x)\, dx + \\ + \int_a^b Q_j(x)\, K^{k+1} y^*(x)\, dx \quad (j = \overline{1, m}), \end{aligned} \tag{20}$$

где $C_j^* = \int_a^b Q_j(x)\, y^*(x)\, dx$.

Вычитая равенства (8) и (10), получаем

$$|y^{*}(x)-y_k(x)|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{m}(C_i^{*}-C_i^{(k)})\,u_i^{(k)}(x)\right|+|K^{k+1}y^{*}(x)|. \tag{21}$$

Из последнего неравенства можем получить оценки погрешности

$$|y^{*}(x)-y_k(x)|\leqslant L_\nu^{(k)}(x)\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|y^{*}(x)|,\ \ \nu=1,2,3,4, \tag{22}$$

где

а) $$L_1^{(k)}(x)=\left\{\sum_{j=1}^{m}|\beta_j^{(k)}(x)|\int_a^b|Q_j(x)|\,(x-a)^{k+1}\,dx+(x-a)^{k+1}\right\}\frac{M^{k+1}}{(k+1)!},$$

$$\beta_j^{(k)}(x)=\sum_{i=1}^{m}b_{ij}^{(k)}u_i^{(k)}(x),\quad B_k=(b_{ij}^{(k)})\,(i,\ \ j=\overline{1,m});$$

б) $$L_2^{(k)}(x)=\left\{\|B_k^{-1}\|_{\mathrm{I}}\max_i\int_a^b|Q_i(x)|\,(x-a)^{k+1}dx\sum_{i=1}^{m}|u_i^{(k)}(x)|+(x-a)^{k+1}\right\}\frac{M^{k+1}}{(k+1)!};$$

в) $$L_3^{(k)}(x)=\left\{\|B_k^{-1}\|_{\mathrm{II}}\max_i|u_i^{(k)}(x)|\sum_{i=1}^{m}\int_a^b|Q_i(x)|(x-a)^{k+1}dx+(x-a)^{k+1}\right\}\frac{M^{k+1}}{(k+1)!};$$

г) $$L_4^{(k)}(x)=\left\{\lambda_1\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left[\int_a^b Q_i(x)\,(x-a)^{k+1}dx\right]^2\sum_{i=1}^{m}|u_i^{(k)}(x)|^2}+(x-a)^{k+1}\right\}\times\frac{M^{k+1}}{(k+1)!},$$

где λ_1^2 — наибольшее собственное число матрицы $(B_k^{-1})^{*}B_k^{-1}$.

Если при некотором k выполняется неравенство

$$L_\nu^{(k)}=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}L_\nu^{(k)}(x)<1,\quad \nu=1,2,3,4,$$

то из неравенства (22) получим оценку погрешности

$$|y^{*}(x)-y_k(x)|\leqslant\frac{L_\nu^{(k)}}{1-L_\nu^{(k)}}\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|y_k(x)|,\ \ \nu=1,2,3,4. \tag{23}$$

Из выведенных оценок погрешности видно, что при малых значениях $(b-a)\,M$ описанный выше алгоритм сходится достаточно скоро.

В заключение заметим, что все вышеизложенное легко перенести на уравнения, заданные в произвольном банаховом пространстве.

3. В тех случаях, когда вычисление выражений $g_k(x)$, $u_i^{(k)}(x)$ связано со значительными трудностями, а число m сравнительно небольшое, приближенные решения уравнения (1) удобнее строить по алгоритму

$$y_n(x)=g_k(x)+\sum_{i=1}^{m}C_{in}^{(k)}u_i^{(k)}(x)+K^{k+1}y_{n-1}(x),\ \ n=1,2,3,\ldots, \tag{24}$$

где $y_0(x)$—произвольное начальное приближение, функции $g_k(x)$, $u_i^{(k)}(x)$ определяются из рекуррентных соотношений (4), а числа $C_{jn}^{(k)}$ являются решениями системы

$$C_{jn}^{(k)}=\int_a^b Q_j(x)\,g_k(x)\,dx+\sum_{i=1}^{m}C_{in}^{(k)}\int_a^b Q_j(x)u_i^{(k)}(x)\,dx+$$

$$+\int_a^b Q_j(x)\,K^{k+1}y_{n-1}(x)\,dx\ \ (j=\overline{1,m}). \tag{25}$$

Замечание. Функции $K^{k+1}y_{n-1}(x)$ вычисляютс і последовательным интегрированием, т. е.

$$K^r y_{n-1}(x) = K[K^{r-1}y_{n-1}(x)],\ r = 2, 3, \ldots, k+1.$$

4. Сходимость и оценки погрешности алгоритма (24) в пространстве $C[a, b]$. Пусть для уравнения (1) выполняются условия 1°, 2°, 3°. Как уже отмечено, при достаточно больших $k\,(k \geqslant k_0)$ существуют ограниченные операторы $(I - A_k)^{-1}$. Следует заметить, что такой оператор может существовать и при некоторых $k < k_0$.

Выберем k так, чтобы существовал ограниченный оператор $(I - A_k)^{-1}$ и выполнялось условие

$$\varrho_k < 1. \tag{26}$$

Тогда указанный выше алгоритм приводится к методу последовательных приближений применительно к уравнению (11), а потому при выполнении условия (26) сходится.

Оценки погрешности можно определить неравенствами:

$$\| y^*(x) - y_n(x) \| \leqslant \frac{\varrho_k}{1-\varrho_k} \| y_n(x) - y_{n-1}(x) \|, \tag{27}$$

$$\| y^*(x) - y_n(x) \| \leqslant \frac{\varrho_k^{n-p+1}}{1-\varrho_k} \| y_p(x) - y_{p-1}(x) \|, \tag{28}$$

где $\varrho_k \leqslant L_\nu^{(k)}$, $\nu = 1, 2, 3, 4$.

Для иллюстрации метода было взято уравнение

$$y(x) = \left(\frac{3}{e} - 1\right) 2 + 3x \int_0^1 s y(s)\, ds + \int_0^x (x - s)\, y(s)\, ds.$$

При $k = 2$, $n = 2$ получили

$$\varrho_2 < \frac{1}{120},\ |y^*(x) - y_k(x)| \leqslant 0,000013.$$

Примененные к этому уравнению обычные методы последовательных приближений и осреднения функциональных поправок дают расходящиеся последовательности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Положий, П. І. Чаленко, Метод смуг розв'язування інтегральних рівнянь, ДАН УРСР, № 4, 1962.
2. М. С. Курпель, Перша республіканська математична конференція молодих дослідників, вип. 1, Вид-во АН УРСР, 418, 1965.
3. С. Г. Михлин, Лекции по линейным интегральным уравнениям, Физматгиз, М., 1959.
4. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, М. — Л., 1963.

Поступила 26.IV 1967 г.,
после переработки — 25.XII 1967 г.
Ивано-Франковский пединститут