1969 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 21, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.946

О краевой задаче для оператора m_i-го порядка параболического или гиперболического вида

Ю. И. Ковач

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$L^{(m_i)}U_i(x, t) = f_i(x, t, U_1, \ldots, U_r) \quad (i = 1, 2, \ldots, r; \; m_i = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где $L^{(m_i)} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{m_i}$ или $L^{(m_i)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$, $L^{(0)} = 1$. Оператор $L^{(m_i)}$, удовлетворяющий условиям

$$L^{(m_i)}cU_i = cL^{(m_i)}U_i; \quad L^{(m_i)}[U_i \pm V_i] = L^{(m_i)}U_i \pm L^{(m_i)}V_i,$$

где $c = \mathrm{const}$, назовем оператором m_i-го порядка соответетственно параболического или гиперболического вида.

Пусть $m_i = 1$, а

$$LU_i(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) U_i(x, t) = f_i(x, t, U_1, \ldots U_r).$$

Начальные и краевые условия для этой системы

$$U_i(x, 0) = \varphi_i(x); \quad U_i(0, t) = \mu_{i1}(t); \quad U_i(l, t) = \mu_{i2}(t), \tag{2}$$

при этом

$$\varphi_i(0) = \mu_{i1}(0); \qquad \varphi_i(l) = \mu_{i2}(l). \tag{3}$$

Для системы

$$L^{(2)}U_i(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2 U_i(x, t) = f_i(x, t, U_1, \ldots, U_r),$$

$$U_i(x, 0) = \varphi_i(x); \qquad \frac{\partial U_i(x, 0)}{\partial t} = \psi_i(x),$$

$$U_i(0, t) = \mu_{i1}(t); \quad U_i(l, t) = \mu_{i2}(t); \; \frac{\partial^2 U_i(0, t)}{\partial x^2} = \mu_{i3}(t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 U_i(l, t)}{\partial x^2} = \mu_{i4}(t),$$

а условия совместности

$$\varphi_i(0) = \mu_{i1}(0); \quad \varphi_i(l) = \mu_{i2}(l),$$

$$\psi_i(0) + a^2\mu_{i3}(0) = \mu'_{i1}(0) + a^2\varphi''_i(0), \tag{5}$$

$$\psi_i(l) + a^2\mu_{i4}(0) = \mu'_{i2}(0) + a^2\varphi''_i(l).$$

условия (2) определяются так:

$$L^{(0)}U_i|_{t=0} = U_i(x, 0) = \varphi_i(x); \quad L^{(0)}U_i|_{x=0} = U_i(0, t) = \mu_{i1}(t);$$
$$L^{(0)}U_i|_{x=l} = U_i(l, t) = \mu_{i2}(t),$$

а условия (4) запишутся в виде

$$L^{(0)}U_i|_{t=0} = \varphi_i(x), \quad L^{(0)}U_i|_{x=0} = \mu_{i1}(t), \quad L^{(0)}U_i|_{x=l} = \mu_{i2}(t),$$

$$LU_i|_{t=0} = \frac{\partial U_i(x, 0)}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 U_i(x, 0)}{\partial x^2} = \psi_i(x) - a^2\varphi_r''(x),$$

$$LU_i|_{x=0} = \frac{\partial U_i(0, t)}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 U_i(0, t)}{\partial x^2} = \mu_{i1}'(t) - a^2\mu_{i3}(t),$$

$$LU_i|_{x=l} = \frac{\partial U_i(l, t)}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 U_i(l, t)}{\partial x^2} = \mu_{i2}'(t) - a^2\mu_{i4}(t).$$

Из предыдущих условий получим условия (5).

Не нарушая общности, допустим, что условия (2) и (4) нулевые. Тогда для существования единственного непрерывного решения системы (1) начальные и краевые условия нужно выбрать так, чтобы

$$L^{(p_i)}U_i|_{t=0} = 0, \; L^{(p_i)}U_i|_{x=0} = 0, \; L^{(p_i)}U_i|_{x=l} = 0 \quad (p_i = 0, 1, \ldots, m_i - 1). \qquad (6)$$

Предполагаем, что в некоторой замкнутой области $\bar{D}_1$, проекция которой на плоскость xot — область $R = \{0 \leqslant x \leqslant l;\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $R \in \bar{D}_1$, функции $f_i(x, t, U_1, \ldots, U_r)$ непрерывны относительно своих аргументов и существуют $\left|\frac{\partial f_i}{\partial U_j}\right| \leqslant N \quad (i, j = 1, 2, \ldots, r)$.

Лемма 1. *Если при* $(x, t) \in \bar{R}$

$$L^{(m_i)}\sigma_{in}(x, t) = \alpha_{in}(x, t) \geqslant 0, \qquad (7)$$

то из уравнений (7) *при условиях* (6) *следует, что в* R

$$L^{(m_i-1)}\sigma_{in}(x, t) \geqslant 0, \; L^{(m_i-2)}\sigma_{in}(x, t) \geqslant 0, \ldots, L^{(0)}\sigma_{in}(x, t) = \sigma_{in}(x, t) \geqslant 0. \qquad (8)$$

Знак в неравенствах (8) *будет обратным, если* $\alpha_{in}(x, t) \leqslant 0$ *при* $(x, t) \in \bar{R}$.

Доказательство. Обозначая $W_{in}(x, t) = L^{(m_i-1)}\sigma_{in}(x, t)$, соотношение (7) запишем в виде

$$LW_{in}(x, t) = \alpha_{in}(x, t) \geqslant 0. \qquad (9)$$

Решение уравнения (9) при условиях $W_{in}(0, t) = 0$, $W_{in}(l, t) = 0$, $W_{in}(x, 0) = 0$ запишется [1, 2] формулой

$$W_{in}(x, t) = L^{(m_i-1)}\sigma_{in}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, t-\tau)\,\alpha_{in}(\xi, \tau)\,d\xi, \qquad (10)$$

где

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}{}' \exp\left\{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)\right\}\sin\frac{k\pi}{l}x\sin\frac{k\pi}{l}\xi \geqslant 0,$$

если $L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, а для $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{l}a(t-\tau)\sin\frac{k\pi}{l}x\sin\frac{k\pi}{l}\xi \geqslant 0.$$

Аналогично формуле (10) будем иметь:

$$
\begin{aligned}
L^{(m_i-2)}\sigma_{in}(x, t) &= \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, t-\tau)\, L^{(m_i-1)}\sigma_{in}(\xi, \tau)\, d\xi, \\
L^{(m_i-3)}\sigma_{in}(x, t) &= \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, t-\tau)\, L^{(m_i-2)}\sigma_{in}(\xi, \tau)\, d\xi, \qquad (11)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
L^{(0)}\sigma_{in}(x, t) &= \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, t-\tau)\, L\sigma_{in}(\xi, \tau)\, d\xi.
\end{aligned}
$$

Так как $\alpha_{in}(x, t) \geqslant 0$ при $(x, t) \in \bar{R}$, то из формул (10) и (11) вытекают неравенства (8).

Пусть $\dfrac{\partial f_i}{\partial U_i} \leqslant M$, где $M \geqslant 0$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть функции* $Z_{i1}(x, t)$ *и* $V_{i1}(x, t)$ *являются решениями уравнений*

$$L^{(m_i)}Z_{i1}(x, t) = |f_i(x, t, 0, \ldots, 0)|; \qquad L^{(m_i)}V_{i1}(x, t) = -|f_i(x, t, 0, \ldots, 0)|$$

при условиях (6). *Тогда при* $(x, t) \in \bar{R}$ *справедливы неравенства*

$$
\begin{gathered}
\alpha_{i1}(x, t) = L^{(m_i)}Z_{i1}(x, t) - f_i(x, t, Z_{11}, \ldots, Z_{r1}) + M\sum_{j=1}^{r}[Z_{j1}(x, t) - V_{j1}(x, t)] \geqslant 0, \\
\beta_{i1}(x, t) = L^{(m_i)}V_{i1}(x, t) - f_i(x, t, V_{11}, \ldots, V_{r1}) - \\
- M\sum_{j=1}^{r}[Z_{j1}(x, t) - V_{j1}(x, t)] \leqslant 0.
\end{gathered} \qquad (12)
$$

Доказательство. На основании леммы 1 имеем $Z_{i1}(x, t) \geqslant 0$, $V_{i1}(x, t) \leqslant 0$. Тогда

$$
\begin{gathered}
\alpha_{i1}(x, t) = |f_i(x, t, 0, \ldots, 0)| - f_i(x, t, 0, \ldots, 0) - \sum_{j=1}^{r}\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial U_j} Z_{i1}(x, t) + \\
+ \sum_{j=1}^{r} MZ_{i1}(x, t) - \sum_{j=1}^{r} MV_{j1}(x, t) = |f_i(x, t, 0, \ldots, 0)| - f_i(x, t, 0, \ldots, 0) + \\
+ \sum_{j=1}^{r}\left(M - \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial U_j}\right) Z_{i1}(x, t) - M\sum_{j=1}^{r} V_{j1}(x, t) \geqslant 0,
\end{gathered}
$$

где $\dfrac{\partial \tilde{f}_i}{\partial U_j}$ — значение производной в некоторой точке, которая находится между функциями $Z_{i1}(x, t)$ и $V_{i1}(x, t)$ в области $\bar{D}_1$. Аналогично

$$
\begin{gathered}
\beta_{i1}(x, t) = -|f_i(x, t, 0, \ldots, 0)| - f_i(x, t, 0, \ldots, 0) + \\
+ \sum_{j=1}^{r}\left(M - \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial U_j}\right) V_{j1}(x, t) - M\sum_{j=1}^{r} Z_{j1}(x, t) \leqslant 0.
\end{gathered}
$$

1. Рассмотрим сначала случай, когда $\frac{\partial f_i}{\partial U_l} \geqslant 0$. Второй случай, когда $\frac{\partial f_i}{\partial U_l} \leqslant 0$, рассмотрим в дальнейшем.

Пусть $G(x, \xi, t-\tau) \leqslant A$ в области R, $\sup\limits_{D_1} |f_i(x, t, U_1, \ldots, U_r)| \leqslant E$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ и рассмотрим подобласть $D \in \overline{D}_1$:

$$\overline{D} = \{0 \leqslant x \leqslant l;\quad 0 \leqslant t \leqslant T;\quad |U_i(x, t) \leqslant E(AlT)^{m_i}\}.$$

Теорема 1. *Пусть при $(x, t) \in \overline{R}$ существуют в области $\overline{D}$ функции $Z_{i1}(x, t)$ и $V_{i1}(x, t)$, имеющие непрерывные производные всех порядков, входящих в оператор L^{mi}, и удовлетворяющие условиям* (6), *а результат подстановки их в систему* (1) *дает*

$$L^{(m_i)}Z_{i1}(x, t) - f_i(x, t, Z_{11}, \ldots, Z_{r1}) = \alpha_{i1}(x, t) \geqslant 0,$$
$$L^{(m_i)}V_{i1}(x, t) - f_i(x, t, V_{11}, \ldots, V_{r1}) = \beta_{i1}(x, t) \leqslant 0. \tag{13}$$

Тогда при $(x, t) \in \overline{R}$ в области $\overline{D}$

$$V_{i1}(x, t) \leqslant U_i(x, t) \leqslant Z_{i1}(x, t). \tag{14}$$

Доказательство. Построим [3.4] последовательности функций $\{Z_{in}(x, t)\}$ и $\{V_{in}(x, t)\}$ по закону

$$Z_{in+1}(x, t) = Z_{in}(x, t) - \sigma_{in}(x, t),$$
$$V_{in+1}(x, t) = V_{in}(x, t) - \omega_{in}(x, t), \tag{15}$$

где $\sigma_{in}(x, t)$ и $\omega_{in}(x, t)$ определяются из уравнений

$$L^{(m_i)}\sigma_{in}(x, t) = \alpha_{in}(x, t),\quad L^{(m_i)}\omega_{in}(x, t) = \beta_{in}(x, t) \tag{16}$$

при условиях (6), а

$$\alpha_{in}(x, t) = L^{(m_i)}Z_{in}(x, t) - f_i(x, t, Z_{1n}, \ldots, Z_{rn}),$$
$$\beta_{in}(x, t) = L^{(m_i)}V_{in}(x, t) - f_i(x, t, V_{1n}, \ldots, V_{rn}). \tag{17}$$

Докажем, что если $\alpha_{i1}(x, t) \geqslant 0$, то последовательности функций $\{\alpha_{in}(x, t)\}$ и $\{\sigma_{in}(x, t)\}$ удовлетворяют неравенствам

$$\alpha_{in}(x, t) \geqslant 0,\quad \sigma_{in}(x, t) \geqslant 0. \tag{18}$$

Действительно, так как $\alpha_{i1}(x, t) \geqslant 0$, то согласно лемме 1 и уравнению (17) следует справедливость неравенств (8) при $n = 1$, поэтому $\sigma_{i1} \times (x, t) \geqslant 0$. Докажем, что все $Z_{in}(x, t) \in \overline{D}$. Пусть $Z_{in}(x, t)$ не выходят из области $\overline{D}$. Тогда $|f_i(x, t, Z_{1n}, \ldots, Z_{rn})| \leqslant E$, $|Z_{in}(x, t)| \leqslant E(AlT)^{m_i}$. Так как закон (15)—(17) построения функций $Z_{in}(x, t)$ совпадает с законом

$$L^{(m_i)}Z_{in+1}(x, t) = f_i(x, t, Z_{1n}, \ldots, Z_{rn}) \tag{19}$$

при условиях (6), то из (19) и (6) согласно (10) и (11) получим:

$$L^{(m_i-1)}Z_{in+1}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f_i(\xi, \tau, Z_{1n}, \ldots, Z_{rn})\, d\xi,$$
$$L^{(m_i-2)}Z_{in+1}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) L^{(m_i-1)}Z_{in+1}(\xi, \tau)\, d\xi, \tag{20}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$L^{(0)}Z_{in+1}(x, t) = Z_{in+1}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) LZ_{in+1}(\xi, \tau)\, d\xi,$$

откуда будем иметь:

$$|L^{(m_i)}Z_{in+1}(x,t)| \leqslant E, \quad |L^{(m_i-1)}Z_{in+1}(x,t)| \leqslant$$
$$\leqslant EAlt, \dots, |Z_{in+1}(x,t)| \leqslant E\frac{(Alt)^{m_i}}{(m_i)!} \leqslant E(Alt)^{m_i}.$$

Докажем справедливость формулы

$$\alpha_{in+1}(x,t) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial U_j} \sigma_{jn}(x,t). \tag{21}$$

Имеем:

$$\alpha_{in+1}(x,t) = L^{(m_i)}Z_{in+1}(x,t) - f_i(x,t,Z_{1n+1},\dots,Z_{rn+1}) =$$
$$= L^{(m_i)}[Z_{in} - \sigma_{in}] - f_i(x,t,Z_{1n} - \sigma_{1n},\dots,Z_{rn} - \sigma_{rn}) =$$
$$= L^{(m_i)}Z_{in}(x,t) - \alpha_{in}(x,t) - f_i(x,t,Z_{1n} - \sigma_{1n},\dots,Z_{rn} - \sigma_{rn}) =$$
$$= f_i(x,t,Z_{1n},\dots,Z_{rn}) - f_i(x,t,Z_{1n} - \sigma_{1n},\dots,Z_{rn} - \sigma_{rn}) =$$
$$= \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial U_j} \sigma_{jn}(x,t).$$

Из формулы (21) при $n=1$ получаем $\alpha_{i2}(x,t) \geqslant 0$, тогда $\sigma_{i2}(x,t) \geqslant 0$. Продолжая этот процесс далее и применяя метод математической индукции, убеждаемся в справедливости неравенств (8). Из соотношений (18) и (15) вытекает, что

$$Z_{in+1}(x,t) \leqslant Z_{in}(x,t) \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{22}$$

Покажем, что $\tilde{U}_i(x,t) = \lim_{n\to\infty} Z_{in}(x,t)$ существуют и удовлетворяют системе (1). Пусть $|\alpha_{i1}(x,t)| \leqslant P$. Тогда из (10) и (11) при $n=1$ имеем:

$$|L^{(m_i)}\sigma_{i1}(x,t)| \leqslant P; \qquad |L^{(m_i-1)}\sigma_{i1}(x,t)| \leqslant PAlt,$$
$$|L^{(m_i-2)}\sigma_{i1}(x,t)| \leqslant P\frac{(Alt)^2}{2!}, \dots, |\sigma_{i1}(x,t)| \leqslant P\frac{(Alt)^{m_i}}{(m_i)!}.$$

Из формулы (21) при $n=1$ имеем

$$|\alpha_{i2}(x,t)| \leqslant PrN\frac{(Alt)^m}{(m)!}, \qquad \frac{(Alt)^m}{m!} = \max_i \frac{(Alt)^{m_i}}{(m_i)!},$$

а поэтому из (10) и (11) при $n=2$ получим:

$$|L^{(m_i)}\sigma_{i2}(x,t) \leqslant p\frac{rN(Alt)^m}{(m)!}, \dots, |\sigma_{i2}(x,t)| \leqslant p\frac{rN(Alt)^{2m}}{(2m)!}.$$

Далее, из формулы (21) при $n=2$ получим оценку

$$|\alpha_{i3}(x,t)| \leqslant P\frac{(rN)^2(Alt)^{2m}}{(2m)!}.$$

Методом математической индукции убеждаемся в справедливости оценок

$$
\begin{aligned}
&|\alpha_{in+1}(x, t)| \leqslant P(rN)^n \frac{(Alt)^{nm}}{(nm)!}, \\
&|L^{(m_i)}\sigma_{in+1}(x, t)| \leqslant P(rN)^n \frac{(Alt)^{nm}}{(nm)!}, \\
&|L^{(m_i-1)}\sigma_{in}(x, t) \leqslant P(rN)^n \frac{(Alt)^{nm+1}}{(nm+1)!}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&|\sigma_{in}(x, t)| \leqslant P(rN)^n \frac{(Alt)^{(n+1)m}}{[(n+1)m]!},
\end{aligned}
\tag{23}
$$

из которых вытекает при $n \to \infty$ абсолютная и равномерная сходимость рядов

$$
L^{(p_i)}\widetilde{U}_i = L^{(p_i)}Z_{i1}(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} L^{(p_i)}[Z_{in+1}(x, t) - Z_{in}(x, t)]
$$

$$
(p_i = 0, 1, 2, \ldots, m_i - 1) \tag{24}
$$

для конечных значений A, N, l и t. Следовательно, $L^{(p_i)}\widetilde{U}_i(x, t)$ существуют, непрерывны и удовлетворяют условиям (6).

Осталось доказать, что предельные функции $\widetilde{U}_i(x, t)$ удовлетворяют системе (1). Из соотношений (17) согласно (10) и (11) получим:

$$
\begin{aligned}
&L^{(m_i-1)}Z_{in}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, t-\tau)\{\alpha_{in}(\xi, \tau) + f_i(\xi, \tau, Z_{1n}, \ldots, Z_{rn})\}\, d\xi, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&L^{(0)}Z_{in}(x, t) = Z_{in}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, t-\tau)\, LZ_{in}(\xi, \tau)\, d\xi.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Переходя в (25) к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{U}_i(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, t-\tau)\, L\widetilde{U}_i(\xi, \tau)\, d\xi, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&L^{(m_i-1)}\widetilde{U}_i(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, t-\tau)\, f_i(\xi, \tau, \widetilde{U}_1, \ldots, \widetilde{U}_r)\, d\xi,
\end{aligned}
$$

откуда

$$
L^{(m_i)}\widetilde{U}_i(x, t) = f_i(x, t, \widetilde{U}_1, \ldots, \widetilde{U}_r),
$$

т. е. $\widetilde{U}_i(x, t) = \lim_{n\to\infty} Z_{in}(x, t)$ удовлетворяют системе (1).

Докажем единственность решения задачи (1), (6). Пусть, кроме системы функций $U_i(x, t)$, существует еще одна система функций $X_i(x, t)$, причем

$$
L^{(m_i)}X_i(x, t) = f_i(x, t, X_1, \ldots, X_r). \tag{26}
$$

Так как $U_i(x, t) = \lim\limits_{n\to\infty} Z_{in}(x, t)$ не зависит от первой системы, то возьмем $Z_{i1}(x, t) = X_i(x, t)$. Из уравнений (26) и (19) имеем

$$L^{(m_i)} Z_{in+1}(x, t) = f_i(x, t, X_1, \ldots, X_r) = L^{(m_i)} X_i(x, t),$$

откуда $Z_{in+1}(x, t) = X_i(x, t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, т. е.

$$U_i(x, t) = \lim_{n\to\infty} Z_{in}(x, t) = X_i(x, t).$$

Доказательство неравенств (14) проведем от противного. Пусть знак неравенства (14) в некоторой точке $(x, t) \in R$ будет обратным, т. е $Z_{i1}(x, t) < U_i(x, t)$. Тогда в силу неравенства $Z_{in}(x, t) \leqslant Z_{i1}(x, t)$ последовательность функций $\{Z_{in}(x, t)\}$ не будет сходиться к решению задачи (1), (6), что противоречит доказанному выше.

Аналогично доказывается, что $V_{i1}(x, t) \leqslant U_i(x, t)$.

В процессе доказательства теоремы 1 доказаны утверждения, которые сформулируем в виде следующих теорем.

Теорема 2. *Если $f_i(x, t, U_1, \ldots, U_r)$, $Z_{i1}(x, t)$ и $V_i(x, t)$ удовлетворяют условиям, при которых справедлива теорема* 1, *то последовательности функций $\{Z_{in}(x, t)\}$ и $\{V_{in}(x, t)\}$, определенных по закону* (15) — (17), *удовлетворяют неравенствам*

$$V_{i1}(x, t) \leqslant V_{i2}(x, t) \leqslant V_{i3}(x, t) \leqslant \ldots \leqslant V_{in}(x, t) \leqslant \ldots \leqslant U_i(x, t) \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant Z_{in}(x, t) \leqslant \ldots \leqslant Z_{i3}(x, t) \leqslant Z_{i2}(x, t) \leqslant Z_{i1}(x, t), \qquad (27)$$

причем разность функций $[Z_{in}(x, t) - V_{in}(x, t)]$ с ростом n абсолютно и равномерно стремится к нулю, а $\lim\limits_{n\to\infty} Z_{in}(x, t) = \lim\limits_{n\to\infty} V_{in}(x, t)$ стремятся к единственному непрерывному решению задачи (1), (6).

Теорема 3. *Пусть в D функции $f_i(x, t, U_1, \ldots, U_r)$ удовлетворяют условиям, при которых справедлива теорема* 1, *и, кроме того, при $(x, t) \in \bar{R}$ функции $f_i(x, t, 0, \ldots, 0) \leqslant 0$ $(\geqslant 0)$. Тогда при $(x, t) \in R$*

$$U_i(x, t) \leqslant 0 \quad (\geqslant 0).$$

Действительно, подстановка в систему (1) системы функций, тождественно равных нулю, дает невязки $\alpha_{i1}(x, t) = -f_i(x, t, 0, \ldots, 0) \geqslant 0$, поэтому из (14) имеем $U_i(x, t) \leqslant 0$.

2. Рассмотрим второй случай, когда $\dfrac{\partial f_i}{\partial U_j} \leqslant 0$. Пусть функции $Z_{i1}(x, t)$ и $V_{i1}(x, t)$ удовлетворяют неравенствам (13). Построим последовательности функций $\{Z_{in}(x, t)\}$ и $\{V_{in}(x, t)\}$ как и в первом случае по закону (15) — (17). Методом, изложенным в теореме 1, убеждаемся в том, что если $\alpha_{i1}(x, t) \geqslant 0$ $(\beta_{in}(x, t) \leqslant 0)$, то последовательности функций $\{\alpha_{in}(x, t)\}$ и $\{\sigma_{in}(x, t)\}$ $(\{\beta_{in}(x, t)\}, \{\omega_{in}(x, t)\})$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered}\alpha_{i2k-1}(x, t) \geqslant 0; \quad \alpha_{i2k}(x, t) \leqslant 0; \quad \sigma_{i2k-1}(x, t) \geqslant 0; \quad \sigma_{i2k}(x, t) \leqslant 0 \\ (\beta_{i2k-1}(x, t) \leqslant 0; \quad \beta_{i2k}(x, t) \geqslant 0; \quad \omega_{i2k-1}(x, t) \leqslant 0; \quad \omega_{i2k}(x, t) \geqslant 0),\end{gathered} \qquad (28)$$

причем справедливы неравенства (23). Из (28) вытекает, что

$$Z_{i2k}(x, t) \leqslant Z_{i2k+1}(x, t), \quad Z_{i2k-1}(x, t) \geqslant Z_{i2k}(x, t). \qquad (29)$$

Пусть из последовательности функций $\{\alpha_{in}(x, t)\}$, которая абсолютно и равномерно стремится к нулю при $n \to \infty$, можно выбрать последовательность функций $\{\delta_{in}(x, t)\}$, которая монотонно по абсолютной величине с ростом n стремится к нулю, причем $\delta_{i1}(x, t) = \alpha_{i1}(x, t) \geqslant 0$. Имеем:

$$\delta_{i1}(x, t) \geqslant |\delta_{i2}(x, t)| \geqslant \delta_{i3}(x, t) \geqslant |\delta_{i4}(x, t)| \geqslant \ldots, \qquad (30)$$

где $\delta_{i2k-1}(x, t) \geqslant 0$, $\delta_{i2k}(x, t) \leqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Построим двусторонний процесс приближенного интегрирования задачи (1), (6) по формуле

$$\widetilde{Z}_{ik+1}(x, t) = \widetilde{Z}_{ik}(x, t) - \widetilde{\sigma}_{ik}(x, t), \tag{31}$$

где $\widetilde{\sigma}_{ik}(x, t)$ определим из уравнений

$$L^{(m_i)}\widetilde{\sigma}_{ik}(x, t) = \delta_{ik}(x, t) \tag{32}$$

при условиях (6). Соответственные последовательности функций $\{\widetilde{Z}_{ik}(x, t)\}$, $\{\widetilde{\sigma}_{ik}(x, t)\}$ и $\{\delta_{ik}(x, t)\}$ являются подпоследовательностями последовательностей $\{Z_{in}(x, t)\}$, $\{\sigma_{in}(x, t)\}$ и $\{\alpha_{in}(x, t)\}$, причем $\widetilde{Z}_{i1}(x, t) = Z_{i1}(x, t)$, $\widetilde{\sigma}_{i1}(x, t) = \sigma_{i1}(x, t)$, $\delta_{i1}(x, t) = \alpha_{i1}(x, t)$.

Теорема 4. *Если при $(x, t) \in R$ последовательность функций $\{\delta_{in}(x, t)\}$ удовлетворяет неравенствам* (30), *то последовательность функций $\{\widetilde{Z}_{in}(x, t)\}$, определенных по закону* (31) *и* (32), *удовлетворяет при $(x, t) \in \bar{R}$ в области $\bar{D}$ неравенствам*

$$\widetilde{Z}_{i2}(x, t) \leqslant \widetilde{Z}_{i4} \leqslant \widetilde{Z}_{i6}(x, t) \leqslant \ldots \leqslant \widetilde{Z}_{i2n}(x, t) \leqslant \ldots \leqslant U_i(x, t) \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant \widetilde{Z}_{i2n-1}(x, t) \leqslant \ldots \leqslant \widetilde{Z}_{i5}(x, t) \leqslant \widetilde{Z}_{i3}(x, t) \leqslant \widetilde{Z}_{i1}(x, t), \tag{33}$$

причем разность функций $[\widetilde{Z}_{i2n-1}(x, t) - \widetilde{Z}_{i2n}(x, t)]$ с ростом n абсолютно и равномерно стремится к нулю.

Действительно, из соотношения $L^{(m_i)}\widetilde{\sigma}_{i1}(x, t) = \delta_{i1}(x, t) \geqslant 0$ согласно лемме 1 следует, что $\widetilde{\sigma}_{i1}(x, t) \geqslant 0$, поэтому на основании (31) получим $\widetilde{Z}_{i2}(x, t) \leqslant \widetilde{Z}_{i1}(x, t)$. Из выражения $L^{(m_i)}[\widetilde{Z}_{i1} - \widetilde{Z}_{i3}] = L^{(m_i)}\widetilde{Z}_{i1} - L^{(m_i)}[\widetilde{Z}_{i2} - \widetilde{\sigma}_{i2}] = L^{(m_i)}\widetilde{Z}_{i1} - L^{(m_i)}[\widetilde{Z}_{i1} - \widetilde{\sigma}_{i1}] + L^{(m_i)}\widetilde{\sigma}_{i2}(x, t) = L^{(m_i)}\widetilde{\sigma}_{i1}(x, t) + L^{(m_i)}\widetilde{\sigma}_{i2} \times (x, t) = \delta_{i1}(x, t) + \delta_{i2}(x, t) \geqslant 0$ вытекает, что $\widetilde{Z}_{i1}(x, t) \geqslant \widetilde{Z}_{i3}(x, t)$, а из неравенства $L^{(m_i)}[\widetilde{Z}_{i2} - \widetilde{Z}_{i3}] = \delta_{i2}(x, t) \leqslant 0$ согласно лемме 1 будем иметь $\widetilde{Z}_{i2}(x, t) \leqslant \widetilde{Z}_{i3}(x, t)$. Справедливость неравенств $\widetilde{Z}_{i2}(x, t) \leqslant \widetilde{Z}_{i4}(x, t)$, $\widetilde{Z}_{i3} \times (x, t) \geqslant \widetilde{Z}_{i5}(x, t)$, $\widetilde{Z}_{i4}(x, t) \leqslant \widetilde{Z}_{i6}(x, t)$ вытекает из следующих неравенств:

$$L^{(m_i)}[\widetilde{Z}_{i2} - \widetilde{Z}_{i4}] = \delta_{i2}(x, t) + \delta_{i3}(x, t) \leqslant 0,$$

$$L^{(m_i)}[\widetilde{Z}_{i3} - \widetilde{Z}_{i5}] = \delta_{i3}(x, t) + \delta_{i4}(x, t) \geqslant 0.$$

Для завершения доказательства теоремы 4 нужно повторить рассуждения, приведенные в теореме 1.

Для случая, когда $\frac{\partial f_i}{\partial U_i} \leqslant 0$, существование функций $Z_{i1}(x, t)$ и $V_{i1}(x, t)$, удовлетворяющих неравенствам (13), вытекает из леммы 2 при $M = 0$.

3. Приведем двусторонний метод приближенного интегрирования задачи (1), (6) при условии, что $M \leqslant \frac{\partial f_i}{\partial U_i}$. Если $M \geqslant 0$, то имеем предыдущий случай, в котором $\frac{\partial f_i}{\partial U_i} \geqslant 0$.

Теорема 5. *Пусть при* $(x, t) \in \bar{R}$ *в области* $\bar{D}$ *существуют функции* $Z_{i1}(x, t)$ *и* $V_{i1}(x, t)$, *имеющие непрерывные производные всех тех порядков, что входят в оператор* $L^{(m_i)}$, *удовлетворяющие условиям* (6) *и*

$$L^{(m_i)}Z_{i1}(x, t) - f_i(x, t, Z_{11}, \ldots, Z_{r1}) - (|M| - M)\sum_{j=1}^{r}[Z_{j1}(x, t) - V_{j1}(x, t)] = \alpha_{i1}(x, t) \geqslant 0, \tag{34}$$

$$L^{(m_i)}V_{i1}(x, t) - f_i(x, t, V_{11}, \ldots, V_{r1}) + (|M| - M)\sum_{j=1}^{r}[Z_{j1}(x, t) - V_{j1}(x, t)] = \beta_{i1}(x, t) \leqslant 0.$$

Тогда при $(x, t) \in \bar{R}$ *в области* $\bar{D}$ *справедливы неравенства*

$$V_{i1}(x, t) \leqslant U_i(x, t) \leqslant Z_{i1}(x, t). \tag{35}$$

Доказательство. Покажем, что $V_{i1}(x, t) \leqslant Z_{i1}(x, t)$. Обозначив $Z_{i1}(x, t) - V_{i1}(x, t) = W_{i1}(x, t)$, из соотношений (34) получим

$$L^{(m_i)}W_{i1}(x, t) - \sum_{j=1}^{r}\left[(2|M| - M) + \left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial U_j} - M\right)\right]W_{j1}(x, t) - \alpha_{i1}(x, t) + \beta_{i1}(x, t) = 0. \tag{36}$$

Для уравнения типа (36) доказана теорема 1. Функции, тождественно равные нулю, удовлетворяют условиям (6), а подстановка их в уравнение (36) дает невязки $\beta_{i1}(xt) - \alpha_{i1}(x, t) \leqslant 0$. Из теоремы 1 следует, что $W_{i1}(x, t) \geqslant 0$, т. е. $Z_{i1}(x, t) \geqslant V_{i1}(x, t)$.

Определим последовательности функций $\{Z_{in}(x, t)\}$ и $\{V_{in}(x, t)\}$ по закону (15) и (16), а

$$\begin{aligned} \alpha_{in}(x, t) &= L^{(m_i)}Z_{in}(x, t) - f_i(x, t, Z_{1n}, \ldots, Z_{rn}) - (|M| - M)\sum_{j=1}^{r}[Z_{jn}(x, t) - V_{jn}(x, t)], \\ \beta_{in}(x, t) &= L^{(m_i)}V_{in}(x, t) - f_i(x, t, V_{1n}, \ldots, V_{rn}) + (|M| - M)\sum_{j=1}^{r}[Z_{jn}(x, t) - V_{jn}(x, t)]. \end{aligned} \tag{37}$$

Из (15), (16) и (37) следует справедливость формулы

$$L^{(m_i)}W_{in+1}(x, t) = \sum_{j=1}^{r}\left[\left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial U_j} - M\right) + 2|M| - M\right]W_{jn}(x, t). \tag{38}$$

Так как $W_{i1}(x, t) \geqslant 0$, то из формулы (38) согласно лемме 1 вытекает, что $W_{in}(x, t) = Z_{in}(x, t) - V_{in}(x, t) \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Аналогично получению оценок (23) и исходя из уравнения (38), получим оценки, из которых будет следовать, что $\{W_{in}(x, t)\}$ с ростом n равномерно стремятся к нулю.

Имеют место следующие формулы

$$\alpha_{in+1}(x, t) = \sum_{j=1}^{r}\left[|M| + \left(\frac{\partial\widetilde{f}_i}{\partial U_j} - M\right)\right]\sigma_{jn}(x, t) - (|M| - M)\sum_{j=1}^{r}\omega_{jn}(x, t),$$

$$\beta_{in+1}(x, t) = \sum_{j=1}^{r}\left[|M| + \left(\frac{\partial\widetilde{f}_i}{\partial U_j} - M\right)\right]\omega_{jn}(x, t) - (|M| - M)\sum_{j=1}^{r}\sigma_{jn}(x,t). \tag{39}$$

Действительно, из (37), (15) и (16) имеем:

$$\alpha_{in+1}(x, t) = L^{(m_i)}[Z_{in} - \sigma_{in}] - f_i(x, t, Z_{1n} - \sigma_{1n}, \ldots, Z_{rn} - \sigma_{rn}) -$$

$$-(|M| - M)\sum_{j=1}^{r}[Z_{jn}(x, t) - V_{jn}(x, t)] + (|M| - M)\sum_{j=1}^{r}[\sigma_{jn}(x, t) - \omega_{jn}(x, t)] =$$

$$= L^{(m_i)}Z_{in}(x, t) - \alpha_{in}(x, t) - f_i(x, t, Z_{1n} - \sigma_{1n}, \ldots, Z_{rn} - \sigma_{rn}) -$$

$$-(|M| - M)\sum_{j=1}^{r}[Z_{jn}(x, t) - V_{jn}(x, t)] + (|M| - M)\sum_{j=1}^{r}[\sigma_{jn}(x, t) - \omega_{jn}(x, t)] =$$

$$= \sum_{j=1}^{r}\frac{\partial\widetilde{f}_i}{\partial U_j}\sigma_{jn}(x, t) + (|M| - M)\sum_{j=1}^{r}[\sigma_{jn}(x, t) - \omega_{jn}(x, t)] =$$

$$= \sum_{j=1}^{r}\left[|M| + \left(\frac{\partial\widetilde{f}_i}{\partial U_j} - M\right)\right]\sigma_{jn}(x, t) - (|M| - M)\sum_{j=1}^{r}\omega_{jn}(x, t).$$

Аналогично доказывается вторая из формул (39).

Введем обозначения:

$$|\alpha_{i1}(x, t)| \leqslant P, \quad |\beta_{i1}(x, t)| \leqslant P, \quad |M| + \left(\frac{\partial\widetilde{f}_i}{\partial U_j} - M\right) \leqslant \frac{K}{2},$$

тогда при $K \geqslant 2(|M| - M)$ будем иметь $|\sigma_{i1}(x, t)| \leqslant P\frac{(Alt)^{m_i}}{(m_i)!}$, $|\omega_{i1}(x, t)| \leqslant P\frac{(Alt)^{m_i}}{(m_i)!}$, а из формул (39) получим:

$$|\alpha_{i2}(x, t)| \leqslant PrK\frac{(Alt)^m}{(m)!}, \quad |\beta_{i2}(x, t)| \leqslant PrK\frac{(Alt)^m}{(m)!}.$$

Продолжая этот процесс далее и применяя метод математической индукции, убеждаемся в том, что последовательности функций $\{\alpha_{in}(x, t)\}$, $\{\sigma_{in}(x, t)\}$, $\{L\sigma_{in}(x, t)\}, \ldots, \{L^{(m_i-1)}\sigma_{in}(x, t)\}$, $\{\beta_{in}(x, t)\}$, $\{\omega_{in}(x, t)\}$, $\{L\omega_{in} \times (x, t)\}, \ldots, \{L^{(m_i-1)}\omega_{in}(x, t)\}$ с ростом n абсолютно и равномерно стремятся к нулю для конечных E, A, l и t, т. е. и в данном случае суммы рядов (24) существуют, непрерывны и удовлетворяют условиям (6).

Аналогично получению соотношений (25) из (37) имеем:

$$L^{(m_i-1)}Z_{in}(x, t) = \int_0^t d\tau\int_0^l G(x, \xi, t - \tau)\{\alpha_{in}(\xi, \tau) + f_i(\xi, \tau, Z_{1n}, \ldots, Z_{rn}) +$$

$$+ (|M| - M) \sum_{j=1}^{r} [Z_{jn}(\xi, \tau) - V_{jn}(\xi, \tau)]\} \, d\xi,$$

. . . .

$$L^{(0)} Z_{in}(x, t) = Z_{in}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) \, L Z_{in}(\xi, \tau) \, d\xi, \tag{40}$$

$$L^{(m_i - 1)} V_{in}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) \{\beta_{in}(\xi, \tau) + f_i(\xi, \tau, V_{1n}, \ldots, v_{rn}) -$$

$$- (|M| - M) \sum_{j=1}^{r} [Z_{jn}(\xi, \tau) - V_{jn}(\xi, \tau)]\} \, d\xi,$$

. . . .

$$L^{(0)} V_{in}(x, t) = V_{in}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) \, L V_{in}(\xi, \tau) \, d\xi.$$

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} Z_{in}(x, t) = \lim\limits_{n \to \infty} V_{in}(x, t) = \widetilde{U}_i(x, t)$, то переходя в (40) к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$L^{(0)} \widetilde{U}_i(x, t) = \widetilde{U}_i(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) \, L \widetilde{U}_i(\xi, \tau) \, d\xi,$$

. . . .

$$L^{(m_i - 1)} \widetilde{U}_i(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) \, f_i(\xi, \tau, \widetilde{U}_1, \ldots, \widetilde{U}_r) \, d\xi,$$

откуда

$$L^{(m_i)} \widetilde{U}_i(x, t) = f_i(x, t, \widetilde{U}_1, \ldots, \widetilde{U}_r),$$

т. е. и в данном случае $\widetilde{U}_i(x, t)$ удовлетворяют системе 1.

Из соотношений (15), (16) и (39) при условии, что $\alpha_{i1}(x, t) \geqslant 0$, $\beta_{i1}(x, t) \leqslant 0$, вытекают следующие неравенства:

$$\alpha_{in}(x, t) \geqslant 0, \quad \beta_{in}(x, t) \leqslant 0, \quad \sigma_{in}(x, t) \geqslant 0, \quad \omega_{in}(x, t) \leqslant 0, \tag{41}$$

из которых следует, что

$$Z_{in+1}(x, t) \leqslant Z_{in}(x, t), \quad V_{in+1}(x, t) \geqslant V_{in}(x, t). \tag{42}$$

Для завершения доказательства неравенств (35), как и в теореме 1, используем метод от противного. Следовательно, и в данном случае так же справедливы неравенства (27).

4. Приведем двусторонний процесс приближенного интегрирования задачи (1), (6), в котором, исходя из системы верхних функций $Z_{i1}(x, t)$ для решения системы (1), следующая система функций $Z_{i2}(x, t)$ будет уже нижней. Пусть $\frac{\partial f_i}{\partial U_j} \leqslant M$, где $M \geqslant 0$. Если $M = 0$, то получим второй случай, в котором $\frac{\partial f_i}{\partial U_j} \leqslant 0$.

Пусть при $(x, t) \in \overline{R}$ в области $\overline{D}$ существуют функции $Z_{i1}(x, t)$ и $V_{i1}(x, t)$, имеющие непрерывные производные всех тех порядков, что входят в оператор $L^{(m_i)}$, и удовлетворяющие условиям (6), а

$$L^{(m_i)}Z_{i1}(x, t) - f_i(x, t, Z_{11}, \ldots, Z_{r1}) + M\sum_{j=1}^{r}|Z_{j1}(x, t) - V_{j1}(x, t)| = \\ = \alpha_{i1}(x, t) \geqslant 0, \tag{43}$$

$$L^{(m_i)}V_{i1}(x, t) - f_i(x, t, V_{11}, \ldots, V_{r1}) - M\Sigma|Z_{j1}(x, t) - V_{j1}(x, t)| = \beta_{i1}(x, t) \leqslant 0.$$

Существование функций $Z_{i1}(x, t)$ и $V_{i1}(x, t)$ следует из леммы 2. Следующие последовательности функций $\{Z_{in}(x, t)\}$ и $\{V_{in}(x, t)\}$ определим по закону (15) и (16), а

$$\alpha_{in}(x, t) = L^{(m_i)}Z_{in}(x, t) - f_i(x, t, Z_{1n}, \ldots, Z_{rn}) + M\sum_{j=1}^{r}|Z_{jn}(x, t) - V_{jn}(x, t)|, \tag{44}$$

$$\beta_{in}(x, t) = L^{(m_i)}V_{in}(x, t) - f_i(x, t, V_{1n}, \ldots, V_{rn}) - M\sum_{j=1}^{r}[Z_{jn}(x, t) - V_{jn}(x, t)].$$

Имеют место формулы

$$\alpha_{in+1}(x, t) = \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\partial\widetilde{f}_i}{\partial U_i} - M\right)\sigma_{jn}(x, t) + M\sum_{j=1}^{r}\omega_{jn}(x, t),$$

$$\beta_{in+1}(x, t) = \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\partial\widetilde{f}_i}{\partial U_i} - M\right)\omega_{jn}(x, t) + M\sum_{j=1}^{r}\sigma_{jn}(x, t), \tag{45}$$

доказательство которых аналогично доказательству формул (39).

Так как $\alpha_{i1}(x, t) \geqslant 0$, $\beta_{i1}(x, t) \leqslant 0$, то из (16) при $n = 1$ согласно лемме 1 получим $\sigma_{i1}(x, t) \geqslant 0$, $\omega_{i1}(x, t) \leqslant 0$, поэтому из (45) будем иметь: $\alpha_{i2}(x, t) \leqslant 0$, $\beta_{i2}(x, t) \geqslant 0$.

Методом математической индукции убеждаемся в справедливости неравенств:

$$\alpha_{i\,2k}(x, t) \leqslant 0;\ \alpha_{i2k-1}(x, t) \geqslant 0;\ \beta_{i2k}(x, t) \geqslant 0;\ \beta_{i2k-1}(x, t) \leqslant 0, \tag{46}$$

$$\sigma_{i\,2k}(x, t) \leqslant 0;\ \sigma_{i2k-1}(x, t) \geqslant 0;\ \omega_{i2k}(x, t) \geqslant 0;\ \omega_{i2k-1}(x, t) \leqslant 0.$$

Из соотношений (16) и (46) имеем:

$$Z_{i2k}(x, t) \leqslant Z_{i2k-1}(x, t),\ V_{i2k}(x, t) \geqslant V_{i2k-1}(x, t). \tag{47}$$

Введем обозначения:

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial U_i} - M\right| \leqslant \frac{a}{2},\ |\alpha_{i1}(x, t)| \leqslant p,\ |\beta_{i1}(x, t)| \leqslant p.$$

Тогда аналогично получению оценок (23) и в данном случае будем иметь:

$$|\sigma_{i1}(x, t)| \leqslant P\frac{(Alt)^{m_i}}{(m_i)!},\quad |\omega_{i1}(x, t) \leqslant P\frac{(Alt)^{m_i}}{(m_i)!},$$

а при $a \geqslant 2M$, $n = 1$ из (45) получим неравенства

$$|\alpha_{i2}(x, t)| \leqslant Pra\frac{(Alt)^{m}}{(m)!},\ |\beta_{i2}(x, t)| \leqslant Pra\frac{(Alt)^{m}}{(m)!}.$$

Продолжая этот процесс далее и применяя метод математической индукции, убеждаемся в том, что последовательности функций $\{\alpha_{in}(x,t)\}$, $\{\sigma_{in}(x,t)\}$, $\{L\sigma_{in}(x,t)\},\ldots,\{L^{(m_i-1)}\sigma_{in}(x,t)\}$, $\{\beta_{in}(x,t)\}$, $\{\omega_{in}(x,t)\}$, $\{L\omega_{in}(x,t)\},\ldots,\{L^{(m_i-1)}\omega_{in}(x,t)\}$ с ростом n абсолютно и равномерно стремятся к нулю для конечных A, l, t и a, следовательно, и в данном случае суммы рядов (24) существуют, непрерывны и удовлетворяют условиям (6).

Пусть из последовательностей функций $\{\alpha_{in}(x,t)\}$ и $\{\beta_{in}(x,t)\}$ можно выбрать подпоследовательности $\{\delta_{ik}(x,t)\}$ и $\{\mu_{ik}(x,t)\}$, которые при $k\to\infty$ монотонно и равномерно по абсолютной величине сходятся к нулю, причем $\delta_{i1}(x,t)=\alpha_{i1}(x,t)\geqslant 0$, $\mu_{i1}(x,t)=\beta_{i1}(x,t)\leqslant 0$. Имеем:

$$\delta_{i1}(x,t)\geqslant|\delta_{i2}(x,t)|\geqslant\delta_{i3}(x,t)\geqslant|\delta_{i4}(x,t)|\geqslant\ldots, \tag{48}$$

$$|\mu_{i1}(x,t)|\geqslant\mu_{i2}(x,t)\geqslant|\mu_{i3}(x,t)|\geqslant\mu_{i4}(x,t)\geqslant\ldots,$$

причем $\delta_{i2k-1}(x,t)\geqslant 0$, $\delta_{i2k}(x,t)\leqslant 0$, $\mu_{i2k-1}(x,t)\leqslant 0$, $\mu_{i2k}(x,t)\geqslant 0$. Построим и в данном случае двусторонний процесс по закону

$$\widetilde{Z}_{ik+1}(x,t)=\widetilde{Z}_{ik}(x,t)-\widetilde{\sigma}_{ik}(x,t),\quad \widetilde{V}_{ik+1}(x,t)=\widetilde{V}_{ik}(x,t)-\widetilde{\omega}_{ik}(x,t), \tag{49}$$

где $\widetilde{\sigma}_{ik}(x,t)$ и $\widetilde{\omega}_{ik}(x,t)$ определим из уравнений

$$L^{(m_i)}\widetilde{\sigma}_{ik}(x,t)=\delta_{ik}(x,t),\qquad L^{(m_i)}\widetilde{\omega}_{ik}(x,t)=\mu_{ik}(x,t) \tag{50}$$

при условиях (6).

Обозначив $\widetilde{Z}_{in}(x,t)-\widetilde{V}_{in}(x,t)=\Psi_{in}(x,t)$, из (44) получим

$$L^{(m_i)}\Psi_{in}(x,t)=\sum_{j=1}^{r}\left[\left(\frac{\partial\widetilde{f}_i}{\partial U_j}-M\right)-M\right]\Psi_{in}(x,t)+\delta_{in}(x,t)-\mu_{in}(x,t). \tag{51}$$

Для уравнения типа (51) доказана теорема 4. Подстановка вместо функций $\Psi_{in}(x,t)$ функций, тождественно равных нулю, дает невязки $\gamma(x,t)=$ $=\mu_{in}(x,t)-\delta_{in}(x,t)$. Пусть $n=2k$. Тогда, принимая во внимание (46) и (48), получим: $\mu_{i2k}(x,t)-\delta_{i2k}(x,t)\geqslant 0$, а при $n=2k-1$ $\mu_{i2k-1}(x,t)-$ $-\delta_{i2k-1}(x,t)\leqslant 0$. Следовательно, из теоремы 4 вытекают неравенства

$$\widetilde{Z}_{i2k}(x,t)\leqslant\widetilde{V}_{i2k}(x,t),\quad \widetilde{Z}_{i2k-1}(x,t)\geqslant\widetilde{V}_{i2k-1}(x,t). \tag{52}$$

Так как $\widetilde{Z}_i(x,t)=\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{Z}_{in}(x,t)$, $\widetilde{V}_i(x,t)=\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{V}_{in}(x,t)$ существуют, то из (52) будем иметь: $\widetilde{Z}_i(x,t)\leqslant\widetilde{V}_i(x,t)$, $\widetilde{Z}_i(x,t)\geqslant\widetilde{V}_i(x,t)$, откуда заключаем, что $\widetilde{Z}_i(x,t)=\widetilde{V}_i(x,t)=\widetilde{U}_i(x,t)$.

Формулы (40) в данном случае запишутся в виде

$$L^{(m_i-1)}\widetilde{Z}_{in}(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Big\{\delta_{in}(\xi,\tau)+$$

$$+f_i(\xi,\tau,\widetilde{Z}_{1n},\ldots,\widetilde{Z}_{rn})-M\sum_{j=1}^{r}[\widetilde{Z}_{jn}(\xi,\tau)-\widetilde{V}_{jn}(\xi,\tau)]\Big\}d\xi, \tag{53}$$

. . . .

$$L^{(0)}\widetilde{Z}_{in}(x,t)=\widetilde{Z}_{in}(x,t)=\int_0^t d\tau\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\,L\widetilde{Z}_{in}(\xi,\tau)\,d\xi,$$

$$L^{(m_i-1)}\widetilde{V}_{in}(x,t)=\int_0^t d\tau\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Big\{\mu_{in}(\xi,\tau)+f_i(\xi,\tau,\widetilde{V}_{1n},\ldots,\widetilde{V}_{rn})+$$

$$+M\sum_{j=1}^{r}[\widetilde{Z}_{in}(\xi,\tau)-\widetilde{V}_{jn}(\xi,\tau)]\Big\}\,d\xi,$$

. . . .

$$L^{(0)}\widetilde{V}_{in}(x,t)=\widetilde{V}_{in}(x,t)=\int_0^t d\tau\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\,L\widetilde{V}_{in}(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Переходя в формулах (53) к пределу при $n\to\infty$, получим:

$$L^{(0)}\widetilde{U}_i(x,t)=\widetilde{U}_i(x,t)=\int_0^t d\tau\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\,L\widetilde{U}_i(\xi,\tau)\,d\xi,$$

. . . .

$$L^{(m_i-1)}\widetilde{U}_i(x,t)=\int_0^t d\tau\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\,f_i(\xi,\tau,\widetilde{U}_1,\ldots,\widetilde{U}_r)\,d\xi,$$

откуда

$$L^{(m_i)}\widetilde{U}_i(x,t)=f_i(x,t,\widetilde{U}_1,\ldots,\widetilde{U}_r),$$

т. е. и в данном случае $\widetilde{U}_i(x,t)$ удовлетворяют системе (1). Рассуждая как во втором случае, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 6. *Если при $(x,t)\in\overline{R}$ последовательности функций $\{\delta_{ik}(x,t)\}$ и $\{\mu_{ik}(x,t)\}$ удовлетворяют условиям* (48), *то последовательности функций $\{\widetilde{Z}_{ik}(x,t)\}$ и $\{\widetilde{V}_{ik}(x,t)\}$, определенных по закону* (49) *и* (50), *при $(x,t)\in\overline{R}$ в области $\overline{D}$ удовлетворяют неравенствам:*

$$\widetilde{Z}_{i2}(x,t)\leqslant\widetilde{Z}_{i4}(x,t)\leqslant\widetilde{Z}_{i6}(x,t)\leqslant\ldots\leqslant\widetilde{Z}_{i2k}(x,t)\leqslant\ldots\leqslant U_i(x,t)\leqslant\ldots$$

$$\ldots\leqslant\widetilde{Z}_{i2k-1}(x,t)\leqslant\ldots\leqslant\widetilde{Z}_{i5}(x,t)\leqslant\widetilde{Z}_{i3}(x,t)\leqslant\widetilde{Z}_{i1}(x,t),$$

$$\widetilde{V}_{i1}(x,t)\leqslant\widetilde{V}_{i3}(x,t)\leqslant\widetilde{V}_{i5}(x,t)\leqslant\ldots\leqslant\widetilde{V}_{i2k-1}(x,t)\leqslant\ldots\leqslant U_i(x,t)\leqslant\ldots$$

$$\ldots\leqslant\widetilde{V}_{i2k}(x,t)\leqslant\ldots\leqslant\widetilde{V}_{i6}(x,t)\leqslant\widetilde{V}_{i4}(x,t)\leqslant\widetilde{V}_{i2}(x,t),$$

причем разности функций $[\widetilde{Z}_{i2k-1}(x,t)-\widetilde{Z}_{i2k}(x,t)]$ и $[\widetilde{V}_{i2k}(x,t)-\widetilde{V}_{i2k-1}(x,t)]$ с ростом k абсолютно и равномерно сходятся к нулю.

Изложенный метод распространяется на системы вида (1), когда число аргументов в неизвестных функциях U_i больше двух, и, кроме того, этот метод является более простым по сравнению с методом, рассмотренным в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, «Наука», М., 1966.
2. Г. М. Положий, Рівняння математичної фізики, Учпедгиз, К., 1959.
3. Ю. И. Ковач, Л. И. Савченко, Решение одной краевой задачи для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, УМЖ, т. 20, № 1, 1968.
4. Ю. И. Ковач, Теорема о «вилке» в задаче Коши для нелинейного уравнения с частными производными высших порядков, УМЖ, т. 18, № 5, 1966.
5. Н. К. Зерагия, Фундаментальные решения нелинейной системы дифференциальных уравнений параболического типа (на груз. языке), Сообщения АН ГрузССР, 26, № 3, 1961.

Поступила 26.III 1968 г.,
после переработки — 12.VI 1968 г.
Ужгородский государственный университет