1969 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 21, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 518:517.948

О некоторых обобщениях метода Ньютона—Канторовича

И. С. Курпель, Ф. М. Мигович

Пусть дано нелинейное операторное уравнение

$$x = T(x), \tag{1}$$

где $T(x)$ — непрерывная нелинейная операция, переводящая банахово пространство E в E.

Для решения нелинейных операторных уравнений общего вида Л. В. Канторович предложил и исследовал итеративный метод [1, 2], являющийся обобщением известного метода касательных Ньютона. В применении к уравнению (1) этот метод заключается в том, что последовательные приближения x_n к решению определяются из уравнений

$$x_{n+1} = T(x_n) - T'(x_n)x_n + T'(x_n)x_{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

где $T'(x_n)$ — производная Фреше оператора $T(x)$ в точке x_n, x_0 — некоторое начальное приближение.

Л. В. Канторовичем был предложен и исследован также модифицированный метод Ньютона, согласно которому последовательные приближения к решению уравнения (1) определяются из уравнений

$$x_{n+1} = T(x_n) - T'(x_0)x_n + T'(x_0)x_{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

При различных предположениях методы (2) и (3) рассматривались многими авторами.

Заметим, что несмотря на то, что уравнения (2) и (3) являются линейными, решение их в общем случае, когда $T'(x_n)$ и $T'(x_0)$ — не вырождены, затруднительно.

В настоящей статье рассматриваются алгоритмы, согласно которым последовательные приближения определяются соответственно из уравнений

$$x_{n+1} = T(x_n) - PT'(x_n)x_n + PT'(x_n)x_{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

и

$$x_{n+1} = T(x_n) - PT'(x_0)x_n + PT'(x_0)x_{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{5}$$

где P — линейный проекционный оператор ($P = P^2$), проектирующий пространство E на его подпространство E_p. Таким образом, в отличие от алгоритмов (2) и (3), для осуществления которых требуется существование соответственно производных $T'(x_n)$ и $T'(x_0)$, в случае алгоритмов (4) и (5) предполагается существование только производных $PT'(x_n)$ и $PT'(x_0)$. Нетрудно заметить также, что решение уравнений (4) и (5) сводится к решению некоторых операторных уравнений в пространстве E_p. При этом, если E_p — конечномерное пространство размерности N, решение уравнений (4) и (5) на каждом шаге сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений порядка не выше N, что в случае, когда N не слишком большое, представляет собой сравнительно простую задачу.

При $P=I$ (I—тождественный оператор) методы (4) и (5) переходят соответственно в основной и модифицированный методы Ньютона — Канторовича.

Заметим также, что если $T(x) = f + Ax$, где A — линейный оператор, действующий в E, $f \in E$, то алгоритмы (4), (5) совпадают с алгоритмом одного из вариантов метода осреднения функциональных поправок Ю. Д. Соколова [3—5].

1. Установим некоторые условия сходимости и оценки погрешности алгоритма (4).

Введем обозначение

$$H = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{j} J_k, \tag{6}$$

где

$$J_1 = p + \frac{h}{2}, \quad J_k = p + \frac{h}{2} J_1 \dots J_{k-1}, \quad k=2, 3, \dots \tag{7}$$

Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *элемент x_0 приближенно удовлетворяет уравнению* (1)

$$\| x_0 - T(x_0) \| \leqslant \eta; \tag{8}$$

2) *для оператора $I - PT'(x)$ существует обратный оператор $\Gamma_x = [I - PT'(x)]^{-1}$ в каждой точке шара S:*

$$\| x - x_0 \| \leqslant HB_0\eta \tag{9}$$

и известны оценки

$$\| \Gamma_x \| \leqslant B, \ \| \Gamma_{x_0} \| \leqslant B_0; \tag{10}$$

3) в шаре S имеют место неравенства

$$\| PT'(x) - PT'(y) \| \leqslant M \| x - y \|, \tag{11}$$

$$\| QT(x) - QT(y) \| \leqslant q \| x - y \| \ (Q = I - P); \tag{12}$$

4) *выполняется соотношение*

$$h = BB_0M\eta < 2(1 - p), \tag{13}$$

где

$$p = Bq < 1.$$

Тогда в шаре S уравнение (1) *имеет решение x^*, к которому сходится процесс* (4), *начиная с x_0, при этом справедлива оценка погрешности*

$$\| x_n - x^* \| \leqslant HB_0\eta J_1 \dots J_n. \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения (4) получаем

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma x_n (x_n - T(x_n)), \ n = 0, 1, \dots,$$

откуда при $n = 0$ имеем

$$\| \delta_1 \| = \| x_1 - x_0 \| \leqslant \| \Gamma_{x_0} \| \| x_0 - T(x_0) \| \leqslant B_0\eta.$$

Из (4) следует далее

$$\delta_{n+1} = x_{n+1} - x_n = T(x_n) - T(x_{n-1}) - PT'(x_{n-1})\delta_n + PT'(x_n)\delta_{n+1},$$

и

$$\delta_{n+1} = [I - PT'(x_n)]^{-1} [T(x_n) - T(x_{n-1}) - PT'(x_{n-1})\delta_n].$$

Используя неравенства (10) — (12) и формулу конечных приращений [2], получаем

$$\|\delta_{n+1}\| \leqslant \|[I - PT'(x_n)]^{-1}\| \{\|PT(x_n) - PT(x_{n-1}) - PT'(x_{n-1})\delta_n\| +$$

$$+ \|QT(x_n) - QT(x_{n-1})\|\} \leqslant B\left\{\left\|\int_0^1 [PT'(x_{n-1} + t(x_n - x_{n-1})) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - PT'(x_{n-1})]\,\delta_n dt\right\| + q\|\delta_n\|\right\} \leqslant \frac{BM}{2}\|\delta_n\|^2 + Bq\|\delta_n\| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{BM}{2}\|\delta_n\| + p\right]\|\delta_n\|. \tag{15}$$

Учитывая (13), из неравенства (15) при $n = 1, 2, \ldots$ последовательно находим

$$\|\delta_2\| \leqslant \left(\frac{BM}{2}\|\delta_1\| + p\right)\|\delta_1\| \leqslant \left(\frac{BM}{2}B_0\eta + p\right)\|\delta_1\| \leqslant \left(\frac{h}{2} + p\right)\|\delta_1\| = J_1\|\delta_1\|,$$

$$\|\delta_3\| \leqslant \left(\frac{BM}{2}\|\delta_2\| + p\right)\|\delta_2\| \leqslant \left(\frac{h}{2}J_1 + p\right)J_1\|\delta_1\| = J_1J_2\|\delta_1\|$$

и по индукции

$$\|\delta_{n+1}\| \leqslant J_1J_2\ldots J_n\|\delta_1\|. \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что $J_n < J_{n-1}$ при $h \neq 0$. Действительно, на основании (13)

$$J_1 = p + \frac{h}{2} < 1.$$

Тогда

$$J_2 = p + \frac{h}{2}J_1 < J_1$$

и по индукции

$$J_n < J_{n-1}.$$

Предположим, что элементы $x_0, x_1, \ldots, x_n$ определены и принадлежат шару S. Покажем, что и элемент x_{n+1} также принадлежит S.

В силу (6) и (16) имеем

$$\|x_0 - x_{n+1}\| \leqslant \|\delta_1\| + \|\delta_2\| + \ldots + \|\delta_{n+1}\| \leqslant \|\delta_1\| + J_1\|\delta_1\| + \ldots + J_1\ldots$$

$$\ldots J_n\|\delta_1\| \leqslant \left(1 + \sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j}J_i\right)B_0\eta \leqslant HB_0\eta,$$

т. е. x_{n+1} а, значит, и вся последовательность $\{x_n\}$ принадлежит шару S.

Из неравенства

$$\|x_n - x_{n+k}\| \leqslant \|\delta_{n+1}\| + \ldots + \|\delta_{n+k}\| \leqslant B_0\eta \sum_{j=n}^{n+k-1}\prod_{i=1}^{j}J_i \leqslant HB_0\eta J_1\ldots J_n \tag{17}$$

следует, что последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе. Предельный элемент x^* этой последовательности и является решением уравнения (1). Из (17) при $k \to \infty$ получаем (14). Так как $x_n \in S$, то $x^* \in S$.

Заметим, что в случае $P = I$, теорема 1 отличается от теоремы И. П. Мысовских [6] тем, что вместо условия $\|T''(x)\| \leqslant M$ налагается условие (11).

2. Рассмотрим случай, когда E — гильбертово пространство, а P является оператором ортогонального проектирования. Используя то свойство что в данном случае для любых $x, y \in E$ имеет место равенство

$$\| Px + Qy \|^2 = \| Px \|^2 + \| Qy \|^2, \tag{18}$$

можем получить менее ограничительные условия сходимости и более точную оценку погрешности.

Обозначим

$$H' = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{j} J_i', \tag{19}$$

где

$$J_1' = \sqrt{p^2 + \frac{h^2}{4}}, \quad J_i' = \sqrt{p^2 + \frac{h^2}{4} J_1'^2 \dots J_{i-1}'^2}. \tag{20}$$

В этом случае имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *При условиях* (8), (10) — (12) *и*

$$h < 2\sqrt{1 - p^2} \quad (p = Bq < 1) \tag{21}$$

в шаре S':

$$\| x - x_0 \| \leqslant H' B_0 \eta \tag{22}$$

уравнение (1) *имеет решение* x^*, *к которому сходится процесс* (4), *при этом быстрота сходимости характеризуется неравенством*

$$\| x_n - x^* \| \leqslant H' B_0 \eta J_1 \dots J_n. \tag{23}$$

Доказательство. На основании (4), (10) — (12), (18) и формулы конечных приращений имеем

$$\| \delta_{n+1} \| \leqslant \| [I - PT'(x_n)]^{-1} \| \, \| PT(x_n) - PT(x_{n-1}) - PT'(x_{n-1})\delta_n + QT(x_n) -$$

$$- QT(x_{n-1}) \| \leqslant B \sqrt{\| PT(x_n) - PT(x_{n-1}) - PT'(x_{n-1})\delta_n \|^2 + \| QT(x_n) - QT(x_{n-1}) \|^2} \leqslant$$

$$\leqslant B \sqrt{\left\| \int_0^1 [PT'(x_{n-1} + t\delta_n) - PT'(x_{n-1})] \, \delta_n dt \right\|^2 + q^2 \| \delta_n \|^2} \leqslant$$

$$\leqslant B \sqrt{\left[\int_0^1 Mt \| \delta_n \|^2 dt \right]^2 + q^2 \| \delta_n \|^2} \leqslant \sqrt{\frac{B^2 M^2}{4} \| \delta_n \|^2 + p^2} \, \| \delta_n \|. \tag{24}$$

Отсюда, используя (20), (21), получим последовательно

$$\| \delta_2 \| \leqslant \sqrt{\frac{h^2}{4} + p^2} \, \| \delta_1 \| = J_1' \| \delta_1 \|,$$

$$\| \delta_3 \| \leqslant \sqrt{\frac{B^2 M^2}{4} J_1'^2 B_0^2 \eta^2 + p^2} \, \| \delta_2 \| = J_2' \| \delta_2 \| \leqslant J_1' J_2' \| \delta_1 \|$$

и по индукции

$$\| \delta_{n+1} \| \leqslant J_1' J_2' \dots J_n' \| \delta_1 \|.$$

Дальше теорема доказывается аналогично теореме 1.

3. Пусть E — координатное банахово пространство, элементы которого $x = \{x_1, \dots, x_k\}$, где x_i — элементы некоторых банаховых пространств B_i, k — конечное число или бесконечность, а оператор $P = P_N$ опреде-

ляется равенством

$$P_N x = \begin{cases} x_i, & i=1, \dots, N, \\ 0, & i=N+1, \dots, k. \end{cases}$$

Если в пространстве E ввести норму по формуле $\| x \| = \sup\limits_i \| x_i \|_{B_i}$ ($\| x_i \|_{B_i}$ — норма элемента x_i в пространстве B_i), то используя свойство

$$\| P_N x + Q_N y \| = \max \{ \| P_N x \|, \| Q_N y \| \} \quad (Q_N = I - P_N), \tag{25}$$

которое в данном случае имеет место для любых $x, y \in E$ [5], получим новые условия сходимости алгоритма (4).

Введем обозначение

$$H'' = \left[\sum_{i=0}^{n_0-1} \left(\frac{h}{2} \right)^{2^i-1} + \frac{p}{1-p} \left(\frac{h}{2} \right)^{2^{n_0-1}-1} \right] \quad (p < 1). \tag{26}$$

Теорема 3. *При условиях* (8), (10) — (12) *и*

$$h < 2 \tag{27}$$

в шаре S'':

$$\| x - x_0 \| \leqslant H'' B_0 \eta$$

уравнение (1) *имеет решение* x^*, *которое находится по методу* (4), *и справедлива оценка погрешности*

$$\| x_n - x^* \| \leqslant \begin{cases} \left[\sum\limits_{i=n}^{n_0-1} \left(\dfrac{h}{2} \right)^{2^i-1} + \dfrac{p}{1-p} \left(\dfrac{h}{2} \right)^{2^{n_0-1}-1} \right] \| \delta_1 \|, & n \leqslant n_0 - 1, \\ \dfrac{p^{n-n_0+1}}{1-p} \left(\dfrac{h}{2} \right)^{2^{n_0-1}-1} \| \delta_1 \|, & n > n_0 - 1, \end{cases} \tag{28}$$

где

$$n_0 = \begin{cases} \alpha, & \textit{если } \alpha \textit{ — целое}, \\ E(\alpha) + 1, & \textit{если } \alpha \textit{ — дробное}. \end{cases} \tag{29}$$

Здесь $E(x)$ — *целая часть* x, α — *корень уравнения* $\left(\frac{h}{2} \right)^{2^{x-1}} = p$.

Доказательство. Используя (4), (10) — (12) и (25), имеем

$$\| \delta_{n+1} \| \leqslant \| [I - P_N T'(x_n)]^{-1} \| \| P_N T(x_n) - P_N T(x_{n-1}) - P_N T'(x_{n-1}) \delta_n +$$
$$+ Q_N T(x_n) - Q_N T(x_{n-1}) \| \leqslant B \max \{ \| P_N T(x_n) - P_N T(x_{n-1}) - P_N T'(x_{n-1}) \delta_n \|,$$
$$\| Q_N T(x_n) - Q_N T(x_{n-1}) \| \} \leqslant B \max \left\{ \left\| \int_0^1 [P_N T'(x_{n-1} + t\delta_n) - P_N T'(x_{n-1})] \delta_n dt \right\|, \right.$$
$$\left. q \| \delta_n \| \right\} \leqslant \max \left\{ \frac{BM}{2} \| \delta_n \|^2, \; p \| \delta_n \| \right\}. \tag{30}$$

Учитывая, что $\| \delta_1 \| \leqslant B_0 \eta$, находим

$$\| \delta_2 \| \leqslant \max \left\{ \frac{h}{2}, p \right\} \| \delta_1 \|. \tag{31}$$

Предположим, что $\frac{h}{2} > p$. Пусть n_0 — первое из натуральных чисел $1, 2, \ldots$, для которых имеет место неравенство

$$\left(\frac{h}{2}\right)^{2^{n_0-1}} \leqslant p. \tag{32}$$

Тогда

$$\|\delta_n\| \leqslant \begin{cases} \left(\frac{h}{2}\right)^{2^{n-1}} \|\delta_1\| & \text{при } n \leqslant n_0, \\ p^{n-n_0}\left(\frac{h}{2}\right)^{2^{n_0-1}} \|\delta_1\| & \text{при } n > n_0. \end{cases} \tag{33}$$

Нетрудно видеть, что n_0 определяется формулой (29). Если же $\frac{h}{2} \leqslant p$, то $n_0 = 1$ и $\|\delta_{n+1}\| \leqslant p^n \|\delta_1\|$.

Покажем, что если $x_0, x_1, \ldots, x_n$ принадлежат шару S'', то x_{n+1} также не выходит из этого шара. Действительно,

$$\|x_0 - x_{n+1}\| \leqslant \|\delta_1\| + \|\delta_2\| + \ldots + \|\delta_{n_0}\| + \|\delta_{n_0+1}\| + \ldots + \|\delta_{n+1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \left[1 + \frac{h}{2} + \ldots + \left(\frac{h}{2}\right)^{2^{n_0-1}-1} + p\left(\frac{h}{2}\right)^{2^{n_0-1}-1} + \ldots + p^{n-n_0+1}\left(\frac{h}{2}\right)^{2^{n_0-1}-1}\right] \times$$

$$\times \|\delta_1\| \leqslant \left[\sum_{i=0}^{n_0-1}\left(\frac{h}{2}\right)^{2^i-1} + \frac{p(1-p^{n-n_0+1})}{1-p}\left(\frac{h}{2}\right)^{2^{n_0-1}-1}\right] B_0\eta \leqslant H'' B_0\eta.$$

Итак, x_{n+1}, а значит, и вся последовательность $\{x_n\}$ принадлежит шару S''.

Оценка погрешности (28) вытекает с неравенств

$$\|x_n - x_{n+k}\| \leqslant \|\delta_{n+1}\| + \ldots + \|\delta_{n_0}\| + \|\delta_{n_0+1}\| + \ldots + \|\delta_{n+k}\| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\left(\frac{h}{2}\right)^{2^{n}-1} + \ldots + \left(\frac{h}{2}\right)^{2^{n_0}-1}\right]\|\delta_1\| + (p + \ldots + p^{n+k-n_0})\left(\frac{h}{2}\right)^{2^{n_0-1}-1}\|\delta_1\| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{i=n}^{n_0-1}\left(\frac{h}{2}\right)^{2^i-1} + \frac{p(1-p^{n+k-n_0})}{1-p}\left(\frac{h}{2}\right)^{2^{n_0-1}-1}\right]\|\delta_1\| \quad \text{при } n \leqslant n_0 - 1$$

и

$$\|x_n - x_{n+k}\| \leqslant \|\delta_{n+1}\| + \ldots + \|\delta_{n+k}\| \leqslant \left[p^{n-n_0+1}\left(\frac{h}{2}\right)^{2^{n_0-1}-1} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + p^{n+k-n_0}\left(\frac{h}{2}\right)^{2^{n_0-1}-1}\right]\|\delta_1\| \leqslant \left[p^{n-n_0+1}\frac{(1-p^k)}{1-p}\left(\frac{h}{2}\right)^{2^{n_0-1}-1}\right]\|\delta_1\|$$

$$\text{при } n > n_0 - 1,$$

если перейти в них к пределу при $k \to \infty$.

4. Условия сходимости алгоритма (4), сформулированные в теоремах 1—3, трудно проверяемы. Укажем на один более жесткий, но легче проверяемый признак сходимости в случае гильбертова пространства E и оператора ортогонального проектирования.

Теорема 4. *Пусть в некотором шаре $S \subset E$ норма оператора $\|PT'(x)\| \leqslant l < 1$, все x_n, определяемые* (4), *принадлежат S, выполняются* *неравенства* (11), (12) *и*

$$l^2 + q^2 < 1, \tag{34}$$

$$\| \delta_1 \| < \frac{2(\sqrt{1-q^2} - l)}{M}. \tag{35}$$

Тогда процесс (4) *сходится к решению* $x^* \in S$ *уравнения* (1) *и имеет место оценка погрешности*

$$\| x_n - x^* \| \leqslant \frac{1}{1 - l_{n+1}} l_1 \ldots l_n \| \delta_1 \|, \tag{36}$$

где

$$l_1 = \frac{Ml \| \delta_1 \| + \sqrt{4(1-l^2) q^2 + M^2 \| \delta_1 \|^2}}{2(1-l^2)},$$

$$l_n = \frac{Ml l_1 \ldots l_{n-1} \| \delta_1 \| + \sqrt{4(1-l^2) q^2 + M^2 l_1^2 \ldots l_{n-1}^2 \| \delta_1 \|^2}}{2(1-l^2)}. \tag{37}$$

Доказательство. Действительно, из (4) имеем

$$\delta_{n+1} = T(x_n) - T(x_{n-1}) - PT'(x_n) x_n + PT'(x_n) x_{n+1} + $$
$$+ PT'(x_{n-1}) x_{n-1} - PT'(x_{n-1}) x_n,$$

$$\| \delta_{n+1} \|^2 = \| PT(x_n) - PT(x_{n-1}) - PT'(x_{n-1}) \delta_n + PT'(x_n) \delta_{n+1} \|^2 + \| QT(x_n) -$$
$$- QT(x_{n-1}) \|^2 \leqslant \left[\frac{M}{2} \| \delta_n \|^2 + l \| \delta_{n+1} \| \right]^2 + q^2 \| \delta_n \|^2,$$

откуда

$$\| \delta_{n+1} \| \leqslant \frac{Ml \| \delta_n \| + \sqrt{4(1-l^2) q^2 + M^2 \| \delta_n \|^2}}{2(1-l^2)} \| \delta_n \|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и в силу (37)

$$\| \delta_{n+1} \| \leqslant l_n \| \delta_n \| \leqslant l_1 \ldots l_n \| \delta_1 \|.$$

На основании (34) и (35) легко показать, что $l_n \leqslant l_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant l_1 < 1$. Следовательно, $\| \delta_n \| \to 0$, а значит процесс (4) сходится к $x^* \in S$.

Оценку погрешности (36) получим, если в неравенстве

$$\| x_n - x_{n+k} \| \leqslant \| \delta_{n+1} \| + \ldots + \| \delta_{n+k} \| \leqslant l_1 \ldots l_n \| \delta_1 \| + \ldots + l_1 \ldots l_{n+k-1} \| \delta_1 \| \leqslant$$
$$\leqslant l_1 \ldots l_n (1 + l_{n+1} + \ldots + l_{n+1} \ldots l_{n+k-1}) \| \delta_1 \| \leqslant l_1 \ldots l_n (1 + l_{n+1} + \ldots$$
$$\ldots + l_{n+1}^{k-2}) \| \delta_1 \|$$

перейти к пределу при $k \to \infty$.

5. Приведем еще один простой признак сходимости алгоритма (4) в случае координатного банахова пространства с m-нормой.

Теорема 5. *Пусть в некотором шаре* $S \subset E$ *норма оператора* $\| PT'(x) \| \leqslant l < 1$, *все* x_n, *определяемые* (4), *принадлежат* S, *выполняются неравенства* (11), (12) *и*

$$q < 1, \tag{38}$$

$$h_1 = \frac{M \| \delta_1 \|}{1 - l} < 2. \tag{39}$$

Тогда процесс (4) *сходится к решению* $x^* \in S$ *уравнения* (1) *и имеет место оценка погрешности* (28), *где* h *и* p *заменены соответственно на* h_1 *и* q.

Доказательство. На основании (4) и (25) получаем

$$\| \delta_{n+1} \| = \| T(x_n) - T(x_{n-1}) - P_N T'(x_{n-1}) \delta_n + P_N T'(x_n) \delta_{n+1} \| \leqslant$$
$$\leqslant \max \{ \| P_N T(x_n) - P_N T(x_{n-1}) - P_N T'(x_{n-1}) \delta_n + P_N T'(x_n) \delta_{n+1} \|,$$
$$\| Q_N T(x_n) - Q_N T(x_{n-1}) \| \} \leqslant \max \left\{ \frac{M}{2} \| \delta_n \|^2 + l \| \delta_{n+1} \|, \ q \| \delta_n \| \right\}.$$

Отсюда имеем

$$\| \delta_{n+1} \| \leqslant \max \left\{ \frac{M \| \delta_n \|}{2(1-l)}, q \right\} \| \delta_n \|.$$

Учитывая (38), (39), теорему 5 можно доказать аналогично теореме 3, заменяя при этом в формулах (31) и др. h и p соответственно на h_1 и q.

6. Применяя алгоритм (4) к уравнению (1), на каждом шаге приходится решать линейное операторное уравнение с оператором, зависящим от x_n. Более простым с вычислительной точки зрения является алгоритм (5), в котором значение производной $PT'(x)$ на каждом шаге берется в фиксированной точке x_0.

Приведем некоторые достаточные признаки сходимости алгоритма (5) и оценки погрешности последовательных приближений.

Теорема 6. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *существует обратный оператор* $[I - PT'(x_0)]^{-1}$ *и известна оценка его нормы*

$$\| [I - PT'(x_0)]^{-1} \| \leqslant B_0; \tag{40}$$

2) *элемент* x_0 *приближенно удовлетворяет уравнению* (1),

$$\| [I - PT'(x_0)]^{-1} (x_0 - T(x_0)) \| \leqslant \eta_0; \tag{41}$$

3) *в шаре*

$$\| x - x_0 \| \leqslant t_1 \eta_0, \tag{42}$$

где t_1 *— меньший корень уравнения*

$$\frac{h_0}{2} t^2 - (1-p) t + 1 = 0, \tag{43}$$

имеют место неравенства (11) *и* (12);

4) *справедливы соотношения*

$$h_0 = M B_0 \eta_0 < \frac{(1-p_0)^2}{2}, \tag{44}$$

$$p_0 = B_0 q < 1. \tag{45}$$

Тогда уравнение (1) *имеет единственное решение, к которому сходится процесс* (5) *с оценкой погрешности*

$$\| x_n - x^* \| \leqslant \frac{c^n}{1-c} \| x_1 - x_0 \|, \tag{46}$$

где

$$c = 1 - \sqrt{(1-p_0)^2 - 2h_0} < 1.$$

Доказательство. Обозначим

$$Ax = [I - PT'(x_0)]^{-1} [T(x) - PT'(x_0) x]. \tag{47}$$

Покажем, что оператор A переводит шар (42) в себя. Действительно,

$$\|Ax - x_0\| = \|x - x_0 - [I - PT'(x_0)]^{-1}(x - T(x))\| \leqslant$$

$$\leqslant \|[I - PT'(x_0)]^{-1}\| \|PT(x) - PT(x_0) - PT'(x_0)(x - x_0) + QT(x) -$$

$$- QT(x_0)\| + \|[I - PT'(x_0)]^{-1}(x_0 - T(x_0))\| \leqslant \frac{B_0 M}{2}\|x - x_0\|^2 +$$

$$+ B_0 q\|x - x_0\| + \eta \leqslant \left(\frac{h_0}{2}t^2 + p_0 t + 1\right)\eta_0 = t\eta_0. \tag{48}$$

Отсюда видно, что если $t \leqslant t_1$, где t_1 — меньший корень уравнения (43), то оператор A переводит шар (42) в себя.

Оценим константу Липшица оператора A:

$$\|Ax - Ay\| = \|[I - PT'(x_0)]^{-1}[T(x) - T(y) - PT'(x_0)(x - y)]\| \leqslant$$

$$\leqslant B_0\|PT(x) - PT(y) - PT'(x_0)(x - y) + QT(x) - QT(y)\| \leqslant$$

$$\leqslant B_0\|PT'(x + t(x - y))(x - y) - PT'(x_0)(x - y)\| + B_0 q\|x - y\| \leqslant$$

$$\leqslant (B_0 M\|x - y\| + B_0 q)\|x - y\| \leqslant (h_0 t_1 + p)\|x - y\| = c\|x - y\|\ (c < 1).$$

Итак, A — оператор сжатия, следовательно, имеет единственную неподвижную точку x^*. Точка x^* находится как предел последовательных приближений x_n, определяемых согласно (5).

Оценка погрешности получается так же, как и в случае обычного метода последовательных приближений.

7. Применим алгоритмы (4) и (5) к решению систем алгебраических или трансцендентных уравнений вида

$$x_i = f_i(x_1, \ldots, x_k),\ i = 1, \ldots, k, \tag{49}$$

где k — натуральное число или бесконечность, в k-мерном векторном пространстве.

Операцию проектирования определим согласно п. 3.

В данном случае

$$T(x) = \{f_i(x_1, \ldots, x_k)\},\quad i = 1, \ldots, k;$$

$$T'(y)x = \left\{\sum_{j=1}^{k} f'_{ij}(y_1, \ldots, y_k)\, x_j\right\},\quad i = 1, \ldots, k;$$

$$PT'(y)x = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{k} f'_{ij}(y_1, \ldots, y_k)\, x_j, & i = 1, \ldots, N, \\ 0, & i = N + 1, \ldots, k, \end{cases}$$

где символом f'_{ij} обозначено $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Уравнения (4) и (5) можно записать соответственно в виде

$$\begin{cases} x_{i,n+1} = f_i(x_{1,n}, \ldots, x_{k,n}) + \sum\limits_{j=1}^{k} f'_{ij}(x_{1,n}, \ldots, x_{k,n})(x_{j,n+1} - x_{j,n}), & i = 1, \ldots, N, \\ x_{i,n+1} = f_i(x_{1,n}, \ldots, x_{k,n}), & i = N + 1, \ldots, k \end{cases} \tag{50}$$

и

$$\begin{cases} x_{i,n+1} = f_i(x_{1,n}, \ldots, x_{k,n}) + \sum\limits_{j=1}^{k} f'_{ij}(x_{1,0}, \ldots, x_{n,0})(x_{j,n+1} - x_{j,n}), \quad i = 1, \ldots, N, \\ x_{i,n+1} = f_i(x_{1,n}, \ldots x_{k,n}), \quad i = N+1, \ldots, k. \end{cases} \qquad (51)$$

Таким образом, последовательные приближения $x_n = \{x_{i,n}\}$ в случае алгоритмов (50) и (51) определяются из систем линейных алгебраических уравнений порядка N.

Если детерминанты $D(x_n)$ и D_0 соответственно систем (50) и (51) отличны от нуля, то, как известно, эти системы однозначно разрешимы, причем

$$x_{i,n+1} = \frac{\sum\limits_{m=1}^{N} D_{im}(x_n)\bar{f}_m(x_n)}{D(x_n)}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$x_{i,n+1} = f_i(x_n), \quad i = N+1, \ldots, k$$

в случае системы (50) и

$$x_{i,n+1} = \frac{\sum\limits_{m=1}^{N} D_{im}(x_0)\bar{f}_m(x_0)}{D_0}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$x_{i,n+1} = f_i(x_n), \qquad i = N+1, \ldots, k.$$

в случае системы (51), где

$$\bar{f}_m(x_n) = f_m(x_n) - \sum_{j=1}^{k} f'_{mj}(x_n)x_{j,n} + \sum_{j=N+1}^{k} f'_{mj}(x_n)f_j(x_n), \qquad m = 1, \ldots, k,$$

$$\bar{f}_m(x_0) = f_m(x_0) - \sum_{j=1}^{k} f'_{mj}(x_0)x_{j,n} + \sum_{j=N+1}^{k} f'_{mj}(x_0)f_j(x_0), \quad m = 1, \ldots, k,$$

а $D_{im}(x_n)$, $D_{im}(x_0)$ — алгебраические дополнения элемента, находящегося на пересечении m-й строки и i-го столбца, соответственно детерминантов $D(x_n)$ и D_0.

Предположим, что в рассматриваемой области выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} &|f_i(y_1, \ldots, y_k) - f_i(z_1, \ldots, z_k)| \leqslant \sum_{j=1}^{k} c_{ij}|y_j - z_j|, \quad i = N+1, \ldots, k, \\ &|f'_{ij}(y_1, \ldots, y_k) - f'_{ij}(z_1, \ldots, z_k)| \leqslant \sum_{s=1}^{k} c_{ijs}|y_s - z_s|, \ i = 1, \ldots, N, j = 1, \ldots, k, \\ &|D_{im}(x)| \leqslant a_{im}, \quad |D(x)| \leqslant d, \\ &|f'_{ij}(x)| \leqslant b_{ij}, \ i = 1, \ldots, N, \ j = 1, \ldots, k. \end{aligned} \qquad (52)$$

Если в качестве пространства E взять пространство с m-нормой ($\|x\| = \sup|x_i|$), то для констант q, M, B, l имеем следующие оценки:

$$q \leqslant \sup_{i=N+1,\ldots,k} \sum_{j=1}^{k} c_{ij}, \quad M \leqslant \sup_{i=1,\ldots,N} \sum_{j,s=1}^{k} c_{ijs},$$

$$B \leqslant \max\left\{1, \frac{1}{d} \sup_{i=1,\ldots,N} \sum_{m=1}^{N} a_{im}\right\}, \quad l \leqslant \sup_{i=1,\ldots,N} \sum_{j=1}^{k} b_{ij}.$$

В случае, если E — гильбертово пространство l_2, т. е. норма элемента x определяется равенством $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, константы q, M, B, l имеют следующие оценки:

$$q \leqslant \left(\sum_{i=N+1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \; M \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=1}^{k} c_{ijs}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad B \leqslant 1 + \frac{1}{d} \times$$

$$\times \left(\sum_{i,m=1}^{N} a_{im}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \; l \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} b_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

8. Пример 1. Бесконечная система нелинейных алгебраических уравнений

$$x_i = \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2(4^i - 1)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{ij}} x_j^i \tag{53}$$

имеет в области $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{3}{4}$ точное решение $x_i = \frac{1}{2^i}$.

Применим для решения системы (53) алгоритм (50) при $N = 2$. В данном случае

$$T'(y)x = \left\{- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i}{2^{ij}} y_j^{i-1} x_j\right\},$$

$$PT'(y)x = \begin{cases} -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i}{2^{ij}} y_j^{i-1} x_j, & i = 1, 2, \\ 0, & i = 3, 4, \ldots, \end{cases}$$

$$QT(x) = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \\ \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2(4^i - 1)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{ij}} x_j^i, & i = 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Алгоритм (50) в данном случае имеет вид

$$x_{i,n+1} = \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2(4^i - 1)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{ij}} x_{j,n}^i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i}{2^{ij}} x_{j,n}^{i-1} (x_{i,n+1} -$$

$$- x_{i,n}), \quad i = 1, 2,$$

$$x_{i,n+1} = \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2(4^i - 1)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{ij}} x_{j,n}^i, \quad i = 3, 4, \ldots \tag{54}$$

Взяв начальное приближение

$$x_{i,0} = \frac{1}{4},$$

для определения первого приближения получим систему уравнений

$$x_{1,1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\left(x_{j,1}-\frac{1}{4}\right),$$

$$x_{2,1}=\frac{17}{60}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{4^j}\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{4^j}\cdot\frac{1}{2}\left(x_{j,1}-\frac{1}{4}\right),$$

$$x_{i,1}=\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2(4^i-1)}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{ij}}\cdot\frac{1}{4^i},\quad i=3,4,\ldots$$

или

$$x_{1,1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}x_{1,1}-\frac{1}{8}x_{2,1}-\frac{1}{2}\sum_{j=3}^{\infty}\frac{1}{2^j}\left[\frac{1}{2^j}+\frac{1}{2(4^j-1)}-\frac{1}{2(2^j-1)4^j}\right],$$

$$x_{2,1}=\frac{47}{160}-\frac{1}{16}x_{1,1}-\frac{1}{64}x_{2,1}-\frac{1}{4}\sum_{j=3}^{\infty}\frac{1}{4^j}\left[\frac{1}{2^j}+\frac{1}{2(4^j-1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(2^j-1)4^j}\right],\tag{55}$$

$$x_{i,1}=\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2(4^i-1)}-\frac{1}{2(2^i-1)4^i},\quad i=3,4,\ldots$$

Вычислив приближенно суммы рядов в правых частях (55), придем к системе уравнений

$$\frac{5}{4}x_{1,1}+\frac{1}{8}x_{2,1}=\frac{2}{3}-0{,}01091,$$

$$\frac{1}{16}x_{1,1}+\frac{65}{64}x_{2,1}=\frac{47}{160}-0{,}00060,$$

$$x_{i,1}=\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2(4^i-1)}-\frac{1}{2(2^i-1)4^i},\quad i=3,4,\ldots,$$

откуда

$$x_{1,1}=0{,}4996,\quad x_{2,1}=0{,}2579,$$

$$x_{i,1}=\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2(4^i-1)}-\frac{1}{2(2^i-1)4^i},\quad i=3,4,\ldots$$

Если систему (53) рассматривать в пространстве с нормой m, то в области $0\leqslant x_i\leqslant\frac{3}{4}$ имеем следующие оценки:

$$l\leqslant\max_i\left|\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{i}{2^{ij}}y^{i-1}\right|\leqslant\frac{1}{2},$$

$$q\leqslant\max_{i=3,4,\ldots}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{ij}}|x_j|^{i-1}\leqslant\frac{27}{224},$$

$$M \leqslant \max_{i=1,2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i(i-1)}{2^{i}} |x_i|^{i-2} \leqslant \frac{1}{3},$$

$$\|\delta_1\| \leqslant \max_i |x_{i,1} - x_{i,0}| = \frac{1}{4}, \quad h_1 = \frac{1}{6}.$$

Следовательно, условия теоремы 5 выполнены и алгоритм (54) сходится к единственному в области $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{3}{4}$ решению $x_i = \frac{1}{2} i$. В данном случае

$$\|x^* - x_1\| = \sup_{i=1,2,\ldots} |x_i^* - x_{i,1}| = 0{,}00796.$$

9. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 K(t, s, x(s))\, ds. \tag{56}$$

Алгоритм (4) в данном случае примет вид

$$x_{n+1}(t) = \int_0^1 K(t, s, x_n(s))\, ds - \int_0^1 \overline{K}_x'(t, s, x_n(s))\, x_n(s)\, ds +$$

$$+ \int_0^1 \overline{K}_x'(t, s, x_n(s))\, x_{n+1}(s)\, ds, \tag{57}$$

где $\overline{K}(t, s, x_n(s)) = \sum_{i=1}^{m} A_i(t) B_i(s, x_n(s))$ — вырожденное ядро, которое аппроксимирует функцию $K(t, s, x)$, например, отрезок ряда Тейлора или ряда Фурье функции $K(t, s, x)$, если ее рассматривать как функцию от t.

Введя обозначение

$$f_n(t) = \int_0^1 K(t, s, x_n(s))\, ds - \int_0^1 \overline{K}_x'(t, s, x_n(s))\, x_n(s)\, ds,$$

алгоритм (57) запишем в виде

$$x_{n+1}(t) = f_n(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i(t) \int_0^1 B_i'(s, x_n(s))\, x_{n+1}(s)\, ds. \tag{58}$$

Решая уравнение (58), приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\alpha_i^{(n+1)} - \sum_{j=1}^{m} b_{ij}^{(n)} \alpha_j^{(n+1)} = \int_0^1 B_i'(s, x_n(s))\, f_n(s)\, ds, \tag{59}$$

где

$$\alpha_i^{(n+1)} = \int_0^1 B_i'(s, x_n(s))\, x_{n+1}(s)\, ds, \quad b_{ij}^{(n)} = \int_0^1 B_i'(s, x_n(s))\, A_j(s)\, ds.$$

Если детерминант $D(x_n)$ системы (59) не равен нулю, то

$$\alpha_i^{(n+1)} = \frac{1}{D(x_n)} \int_0^1 \sum_{k=1}^{m} D_{ki}(x_n)\, B_k'(s, x_n(s))\, f_n(s)\, ds$$

и

$$x_{n+1}(t) = f_n(t) + \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{A_i(t)\, D_{ki}(x_n)\, B'_k(s, x_n(s))}{D(x_n)} f_n(s)\, ds,$$

где $D_{ki}(x_n)$ — алгебраические дополнения элемента, находящегося на пересечении i-й строки и k-го столбца детерминанта $D(x_n)$.

Пусть функции $\overline{K}'_x(t, s, x)$, $Q(t, s, x)$ и $L(t, s, x)$, где

$$Q(t, s, x) = K(t, s, x) - \overline{K}(t, s, x),$$

$$L(t, s, x) = \frac{1}{D(x)} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} A_i(t)\, D_{ki}(x)\, B'_k(s, x)$$

в рассматриваемой области удовлетворяют условиям

$$|\overline{K}'_x(t, s, x) - \overline{K}'_x(t, s, y)| \leqslant k(t, s)\, |x - y|,$$

$$|Q(t, s, x) - Q(t, s, y)| \leqslant q(t, s)\, |x - y|,$$

$$|L(t, s, x)| \leqslant r(t, s), \quad |\overline{K}'_x(t, s, x)| \leqslant b(t, s).$$

Если уравнение (56) рассматривать в пространстве $C[0,1]$ непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, то константы, указанные в теореме 1, можно оценить следующим образом:

$$q \leqslant \sup_{t \in [0,1]} \int\limits_0^1 q(t, s)\, ds, \quad M \leqslant \sup_{t \in [0,1]} \int\limits_0^1 k(t, s)\, ds,$$

$$B \leqslant 1 + \sup_{t \in [0,1]} \int\limits_0^1 r(t, s)\, ds, \quad l \leqslant \sup_{t \in [0,1]} \int\limits_0^1 b(t, s)\, ds.$$

Если же в качестве пространства E взять пространство $L_2\,[0,1]$ интегрируемых с квадратом функций, то для данных констант имеем следующие оценки:

$$q \leqslant \sqrt{\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 q^2(t, s)\, ds dt},$$

$$M \leqslant \sqrt{\int\limits_0^1 \overline{k}^2(t)\, dt}, \quad \overline{k}(t) \geqslant k(t, s),$$

$$B \leqslant 1 + \sqrt{\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 r^2(t, s)\, ds dt},$$

$$l \leqslant \sqrt{\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 b^2(t, s)\, ds dt}.$$

10. Пример 2. Нелинейное интегральное уравнение

$$x(t) = 5 + \frac{15}{32} t - \int\limits_0^1 \left[20\, x(s) - \frac{1}{2} t s x^2(s) \right] ds \tag{60}$$

имеет в области $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ решение

$$x(t) = \frac{1}{2} t.$$

Применим к уравнению алгоритм (52), определив оператор P равенством $Px = \int_0^1 x(t)dt$. Здесь

$$T'(y)x = -\int_0^1 [20 - tsy(s)]\, x(s)\, ds,$$

$$PT'(y)x = -\int_0^1 \left[20 - \frac{s}{2} y(s)\right] x(s)\, ds.$$

Алгоритм (52) в данном случае принимает вид

$$x_{n+1}(t) = 5 + \frac{15}{32} t + \frac{1}{2} \int_0^1 (t-1) s x^2(s)\, ds - \int_0^1 \left[20 - \frac{s}{2} x_n(s)\right] x_{n+1}(s)\, ds. \quad (61)$$

Обозначив

$$f_n(t) = 5 + \frac{15}{32} t + \frac{1}{2} \int_0^1 (t-1) s x^2(s)\, ds,$$

имеем

$$[1 - PT'(x_n)]^{-1} f_n = x_{n+1}(t) = f_n(t) -$$

$$- \frac{1}{1 + \int_0^1 \left[20 - \frac{s}{2} x_n(s)\right] ds} \int_0^1 [20 - sx_n(s)] f_n(s)\, ds.$$

Простой проверкой легко убедиться, что оператор переводит область $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ в себя. Если в качестве E взять пространство $L_2\,[0, 1]$, то для указанных в п. 1 констант в данной области имеем следующие оценки:

$$q \leqslant \frac{1}{6}, \quad M \leqslant \frac{1}{2}, \quad B \leqslant 1{,}0655, \quad p = 0{,}1776, \quad \eta = \frac{\sqrt{723}}{192}, \quad h = 0{,}08.$$

Решая уравнение (60) методом (61), получим в первом приближении

$$x_1(t) = \frac{31}{64} t + \frac{247}{32160},$$

во втором приближении

$$x_2(t) = 0{,}49932\, t + 0{,}00028.$$

Для погрешностей первого и второго приближений имеем следующие значения:

$$\| x_1(t) - x^*(t) \|_{L_2} = 0{,}00452,$$

$$\| x_2(t) - x^*(t) \|_{L_2} = 0{,}00021.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович. Функциональный анализ и прикладная математика. УМН, т. 3, вып. 6, 1948.
2. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
3. Ю. Д. Соколов, Метод осреднения функциональных поправок. «Наукова думка», К., 1967.
4. А. Ю. Лучка, Теория и применение метода осреднения функциональных поправок, Изд-во АН УССР, К., 1963.
5. Н. С. Курпель, Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений, «Наукова думка», К., 1968.
6. И. П. Мысовских, О сходимости метода Л. В. Канторовича решения функциональных уравнений и его применения, ДАН СССР, т. 70, № 4, 1950.

Поступила 21.VI 1968 г.

Институт математики АН УССР