1969 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 21, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.43

Линейные функционалы над соболевскими пространствами и граничные задачи, порожденные теоремами о гомеоморфизмах

Ганна Марцинковска

Настоящая работа посвящена исследованию гомеоморфизмов для эллиптической граничной задачи с точки зрения обобщенных функций. Как известно, замыкание оператора, порожденного этой задачей в соответственно сконструированных нормах, устанавливает ряд гомеоморфизмов между некоторыми пространствами (это доказано, например, в [1, 2] (см. также [3]); относительно дальнейших библиографических указаний см. [3, 4]). В случае однородных граничных условий эти пространства являются подпространствами соболевских пространств или сопряженными к ним; для неоднородных граничных условий они принимают более сложный вид.

Теоремы о гомеоморфизмах ведут к следствиям, которые могут показаться странными с точки зрения классической теории дифференциальных уравнений. Например, в случае однородных граничных условий замыкание оператора, порожденного граничной задачей, переводит гомеоморфно пространство $L_2(G) \ominus N$ на пространство, сопряженное к некоторому подпространству соболевского пространства $W_2^{2m}(G)$ (здесь G — область, в которой рассматривается граничная задача; $2m$ — порядок дифференциального выражения; N — ядро граничной задачи). Так как функции из $L_2(G)$ не удовлетворяют никаким граничным условиям, то на первый взгляд кажется, что дифференциальное уравнение однозначно разрешимо без добавочных условий, наложенных на решение. Но фактически граничные условия есть — они однозначно определены правым членом гомеоморфизма. В настоящей работе мы докажем, что с любым из гомеоморфизмов, о которых говорится в упомянутой выше теореме, можно связать граничную задачу, в которой граничные данные — обобщенные функции на границе области. Правый член дифференциального уравнения является в таком случае обобщенной функцией в области G.

Выражаю благодарность Ю. М. Березанскому за постановку вопроса и весьма полезные указания во время выполнения этой работы.

1. **Общий вид линейного функционала над пространством** W_2^l (гр). Как указывалось, в формулировке теоремы о гомеоморфизмах, порожденных эллиптической задачей с однородными граничными условиями, фигурируют пространства вида $[W_2^l(\text{гр})]^*$ ($l = 1, 2, \ldots$). Покажем, что можно описать структуру этих пространств в терминах обобщенных функций (распределений в смысле Л. Шварца), действующих в области и на ее границе.

Предположим, что G — n-мерная ограниченная область с бесконечно дифференцируемой границей Г. Пусть сначала $W_2^l(\text{гр}) = \overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$ и пусть f принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^{-l}(G) = [\overset{\circ}{W}{}_2^l(G)]^*$. Так как сходимость в пространстве $\mathfrak{D}(G)$ (см. [5], а также [6], где принято обозначение $\mathfrak{D}(G) = K$) сильнее, чем в соболевском пространстве $W^l(G)$, то линейная форма (φ, f) ($\varphi \in \overset{0}{C}{}^\infty_1(G)$) является распределением в области G. Из плотности множества $\overset{0}{C}{}^\infty_0(G)$ в $\overset{0}{W}{}^l_2(G)$ следует, что это распределение однозначно определяет функционал f. Таким образом, получаем вложение $\overset{0}{W}{}^{-l}(G) \subset \mathfrak{D}'(G)$ (легко доказать, что оно вполне непрерывно, но мы в дальнейшем не используем этот факт). В случае общих (или снятых) граничных условий такого вложения уже нет, потому что множество $C_0^\infty(G)$ не является плотной частью пространства W^l (гр) и линейная форма (φ, f) ($\varphi \in C_0^\infty(G)$, $f \in [W^l$(гр)$]^*$) не определяет однозначно функционала f.

В настоящем пункте покажем, что в таком случае можно отождествить f с некоторым набором распределений, определенных в области G и на компактном многообразии Γ.

Сначала сформулируем лемму, которая понадобится нам ниже. По формуле Грина для любых $\varphi \in W_2^l(G)$, $u \in W_2^{2l}(G)$ имеет место равенство

$$(\varphi, u)_l = (\varphi, \Lambda_l u) + \sum_{j=0}^{l-1} \left\langle \frac{\partial^j \varphi}{\partial \nu^j}, T_j u \right\rangle, \tag{1}$$

где $\Lambda_l = \sum\limits_{0 \leq |\alpha| \leq l} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha}$, T_j — граничное дифференциальное выражение порядка $2l - j - 1$. Обозначим $M_l(G) = W_2^l(G) \ominus \overset{0}{W}{}^l_2(G)$ (ортогональное вычитание в $W_2^l(G)$). Интегрируя по частям и учитывая условие ортогональности, получаем $\Lambda_l u = 0$ для $u \in W_2^{2l}(G) \cap M_l(G)$ (это справедливо также и для $u \in M_l(G)$, если производные в выражении Λ_l понимать в слабом смысле). Поэтому для $u \in W_2^{2l}(G) \cap M_l(G)$ равенство (1) имеет вид

$$(\varphi, u)_l = \sum_{j=0}^{l-1} \left\langle \frac{\partial^j \varphi}{\partial \nu^j}, T_j u \right\rangle. \tag{2}$$

Лемма 1. *Замыкание (по непрерывности) T отображения*

$$u \to (T_0 u, T_1 u, \ldots, T_{l-1} u) \quad (u \in W_2^{2l}(G) \cap M_l(G)), \tag{3}$$

рассматриваемого действующим из $M_l(G)$ в прямую сумму $\sum\limits_{j=0}^{l-1} W_2^{-l+j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$, устанавливает гомеоморфизм между этими пространствами. (Для произвольного $u \in M_l(G)$ по-прежнему будем писать $Tu = (T_0 u, \ldots, T_{l-1} u)$.)

Действительно, соответствие $\varphi \to \left(\varphi\Big|_\Gamma, \ldots, \frac{\partial^{l-1}\varphi}{\partial \nu^{l-1}}\Big|_\Gamma\right)$ определяет гомеоморфное отображение пространства $M_l(G)$ на прямую сумму $\otimes \sum\limits_{j=0}^{l-1} W_2^{l-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ [7, 8]. Поэтому для каждого $u \in M_l(G)$ форма $(\varphi, u)_l$ ($\varphi \in M_l(G)$) определяет линейный функционал над элементами $\left(\varphi\Big|_\Gamma, \ldots\right.$ $\left.\ldots, \frac{\partial^{l-1}\varphi}{\partial \nu^{l-1}}\Big|_\Gamma\right) \in \otimes \sum\limits_{j=0}^{l-1} W_2^{l-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Тогда существует элемент $(u_0, u_1, \ldots, u_{l-1}) \in$

$\in \bigotimes \sum\limits_{j=0}^{l-1} W_2^{-j+l+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ такой, что

$$(\varphi, u)_l = \sum_{j=0}^{l-1} \left\langle \frac{\partial^j \varphi}{\partial \nu^j}, u_j \right\rangle, \tag{4}$$

а оператор T: $u \to (u_0, u_1, \ldots, u_m)$ непрерывно и взаимно однозначно действует из всего $M_l(G)$ в $\oplus \sum\limits_{j=0}^{l-1} W_2^{-l+j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Более того $\Re(T) = \oplus \sum\limits_{j=0}^{l-1} W_2^{-l+j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Действительно, если $u_j \in W_2^{-l+j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ $(j=0, \ldots, l-1)$, то форма $\sum\limits_{j=0}^{l-1} \left\langle \frac{\partial^j \varphi}{\partial \nu^j}, u_j \right\rangle$ определяет линейный функционал над $M_l(G)$, и по теореме Ф. Рисса существует элемент $u \in M_l(G)$ такой, что справедлива формула (4). Поэтому $Tu = (u_0, \ldots, u_{l-1})$. Итак, оператор T гомеоморфно отображает $M_l(G)$ на $\oplus \sum\limits_{j=0}^{l-1} W_2^{-l+j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Но из (2) и (4) непосредственно следует, что оператор T является расширением оператора (3). Лемма доказана.

Перейдем теперь к описанию функционалов над пространством $W_2^l(\text{гр})$. Начнем со случая снятых граничных условий. Так как $W_2^l(G) = \overset{0}{W}{}_2^l(G) \oplus M_l(G)$, то для сопряженного пространства $W_2^{-l}(G)$ имеет место разложение

$$W_2^{-l}(G) = \overset{0}{W}{}^{-l}(G) \oplus [M_l(G)]^*.$$

Поэтому функционал $f \in W_2^{-l}(G)$ допускает однозначное представление в виде суммы

$$f = f_G + f_\Gamma, \tag{5}$$

где f_G (внутренняя часть функционала) принадлежит $\overset{0}{W}{}_2^{-l}(G)$, а f_Γ (граничная часть функционала) — функционал над $M(G)$.

Как уже было сказано, элементы пространства $W_2^{-l}(G)$ являются обобщенными функциями в области G. Охарактеризуем их точнее, применяя к пространству $\overset{0}{W}{}_2^l(G)$ теорему Ф. Рисса. Из этой теоремы следует представление

$$(\varphi, f_G) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} (D^\alpha \varphi, D^\alpha h) \quad (\varphi \in C_0^\infty(G)), \tag{6}$$

где $h \in \overset{0}{W}{}_2^l(G)$. Обозначая $h_\alpha = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha h$, запишем (6) в виде

$$f_G = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} D^\alpha h_\alpha, \tag{7}$$

где $h_\alpha \in L_2(G)$ (производные в представлении (7) надо понимать в слабом смысле).

Обратимся теперь к исследованию граничной части функционала.

Теорема 1. *Для произвольного* $f \in W_2^{-l}(G)$ *граничная часть* f_Γ *представима в виде*

$$(\varphi, f_\Gamma) = \sum_{j=0}^{l-1} \left\langle \frac{\partial^j \varphi}{\partial \nu^j}, g_j \right\rangle \quad (\varphi \in M_l(G)), \tag{8}$$

причем отображение $f_\Gamma \to (g_0, g_1, \ldots, g_m)$ *осуществляет гомеоморфизм между* $|M_l(G)|^*$ и $\oplus \sum_{j=0}^{l-1} W_2^{-l+j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Доказательство. По теореме Ф. Рисса существует элемент $g \in M_l(G)$ такой, что $(\varphi, f_\Gamma) = (\varphi, g)_l$. Представление (8) следует из (4). Так как отображение $f_\Gamma \to g$ является изометрией, то второе утверждение теоремы следует из леммы 1.

Пусть на Γ задана нормальная система граничных дифференциальных выражений $\{B_s\}_{s=1}^{p}$. Обозначая через m_s порядок B_s, предположим, что $0 \leqslant m_s < l$ для $s = 1, \ldots, p$. Выражение B_s можно записать в виде

$$B_s = \frac{\partial^{m_s}}{\partial \nu^{m_s}} + \sum_{r=0}^{m_s-1} \Theta_{rs} \frac{\partial^r}{\partial \nu^r} \quad (s = 1, \ldots, p),$$

где Θ_{rs} — тангенциальное дифференциальное выражение на Γ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами порядка $m_s - r$ (не ограничивая общности можно предположить, что коэффициент при $\frac{\partial^{m_s}}{\partial \nu^{m_s}}$ равен единице).

Объясним структуру функционала над пространством $W_2^l(\text{гр})$ для граничных условий вида $B_s\varphi|_\Gamma = 0$ $(s = 1, \ldots, p)$. Обозначим $M_l(\text{гр}) = W_2^l(\text{гр}) \ominus \overset{0}{W}{}_2^l(G)$ (ортогональное вычитание в $W_2^l(G)$). Как и в случае снятых граничных условий, имеет место разложение

$$W_2^{-l}(\text{гр}) = \overset{0}{W}{}_2^{-l}(G) \oplus |M_l(\text{гр})|^*.$$

Поэтому для любого $f \in W_2^{-l}(\text{гр})$ справедливо (однозначное) разложение (5), где внутренняя часть функционала f_G принадлежит пространству $\overset{0}{W}{}_2^{-l}(G)$, а граничная часть f_Γ является функционалом над $M_l(\text{гр})$. Внутренняя часть исследовалась выше, исследуем граничную часть. Пусть $\varphi \in M_l(\text{гр})$. Тогда

$$\frac{\partial^{m_s}\varphi}{\partial \nu^{m_s}} = -\sum_{r=0}^{m_s-1} \Theta_{rs} \frac{\partial^r \varphi}{\partial \nu^r} \quad (s = 1, \ldots, p)$$

и поэтому для $g_{m_s} \in W_2^{-l+m_s+\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\left\langle \frac{\partial^{m_s}\varphi}{\partial \nu^{m_s}}, g_{m_s} \right\rangle = \left\langle -\sum_{r=0}^{m_s-1} \Theta_{rs} \frac{\partial^r \varphi}{\partial \nu^r}, g_{m_s} \right\rangle. \tag{9}$$

Применяя формулу Стокса на компактном многообразии Γ (см. [9]), перебросим тангенциальные производные в правой части (9) на второй член. Получаем

$$\left\langle \frac{\partial^{m_s}\varphi}{\partial\nu^{m_s}}, g_{m_s}\right\rangle = \sum_{r=0}^{m_s-1} \left\langle \frac{\partial^r\varphi}{\partial\nu^r}, -\Theta_{rs}^{+} g_{m_s}\right\rangle, \qquad (10)$$

где Θ_{rs}^{+} — дифференциальное выражение, сопряженное к Θ_{rs} относительно $L_2(\Gamma)$. Так как функционал над M_l(гр) является сужением функционала над $M_l(G)$, то мы можем получить представление функционала $f_\Gamma \in [M_l(\text{гр})]'$, применяя формулу (8) для $\varphi \in M_l$(гр). Используя (10), получаем

$$(\varphi, f_\Gamma) = \sum_{j\in P} \left\langle \frac{\partial^j\varphi}{\partial\nu^j}, h_j\right\rangle \quad (\varphi \in M_l(\text{гр})), \qquad (11)$$

где $h_j = g_j - \sum_{\substack{r=1,\dots,p,\\ m_r>j}} \Theta_{jr}^{+} g_{m_r}$, а P обозначает множество всех целых чисел из интервала $[0, l-1]$, не содержащихся в последовательности $\{m_s\}_{s=1}^{p}$.

Теперь можем сформулировать теорему.

Теорема 2. *Для произвольного* $f \in W_2^{-l}$(гр) *граничная часть* f_Γ *представима в виде* (11). *Отображение* $f_\Gamma \to \{h_j\}_{j\in P}$ *является гомеоморфизмом*

$$[M_l(\text{гр})]^* \to \sum_{j\in P} W_2^{-l+j+\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Первое утверждение теоремы уже доказано. Второе легко получается из представления (11) путем таких же рассуждений, как и при доказательстве леммы 1.

2. Граничные задачи, соответствующие гомеоморфизмам в случае однородных граничных условий. Пусть в ограниченной области G с бесконечно дифференцируемой границей Γ задано правильно эллиптическое дифференциальное выражение L порядка $2m$. Предположим, что на границе Γ задана нормальная система граничных дифференциальных выражений $\{B_j\}_{j=1}^{m}$, которая накрывает L.

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями, введенными в [3]. Из теоремы 6.12 [3] следует, что расширения по непрерывности Λ_s оператора $u \to Lu$ ($u \in W_2^{2m}$(гр)) осуществляют гомеоморфизм между следующими парами пространств:

$$H_{s+2m}(\text{гр}) \to H_s(\text{гр})^{+} \quad \text{для } -2m \leqslant s \leqslant 0,$$

$$H_{2m+s} \to H_s(\text{гр})^{+} \quad \text{для } s \leqslant -2m.$$

Докажем, что с гомеоморфизмом Λ_s можно связать некоторую граничную задачу, в которой граничные условия уже не будут однородными, а граничные данные являются обобщенными функциями на многообразии Γ.

Лемма 2 [10]. *Пусть* m_j — *порядок оператора* B_j ($j = 1, \dots, m$) *и* k — *целое число* ($0 \leqslant k \leqslant 2m$) *такое, что* $m_j < k$ *для* $j = 1, \dots, p$ (*где* $0 \leqslant p \leqslant m$), *а для остальных* j *имеет место противоположное неравенство. Если* W_2^k(гр)' (*с нормой пространства* $W_2^k(G)$) *обозначает множество всех функций* $v \in W_2^k(G)$, *удовлетворяющих граничным условиям* $B_j v|_\Gamma = 0$ ($j = 1, \dots, p$), *то* W_2^{2m}(гр) *плотно в* W_2^k(гр)'.

Доказательство. Пусть $u \in W_2^k(\text{гр})'$. Найдется последовательность $v_n \in W_2^{2m}(\text{гр})$ такая, что

$$\langle\langle \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} - \frac{\partial^j v_n}{\partial \nu^j} \rangle\rangle_{k-j-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{n} \quad (j = 0, 1, \dots, k-1;\ n = 1, 2, \dots). \tag{12}$$

Из ортогонального разложения $W_2^k(\text{гр})' = \overset{0}{W}{}_2^k(G) \oplus M_k(\text{гр})'$ получаем однозначное представление

$$\begin{aligned} v_n &= \overset{0}{v}_n + v_n' \\ u &= \overset{0}{u} + u' \end{aligned} \qquad (\overset{0}{v}_n, \overset{0}{u} \in \overset{0}{W}{}_2^k(G); \quad v_n', u' \in M_k(\text{гр})').$$

Из (12) следует оценка

$$\| u' - v_n' \|_k \leqslant \frac{c}{n}, \tag{13}$$

где c положительная константа, не зависящая от n. Так как $\overset{0}{W}{}_2^{2m}(G)$ плотно в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^k(G)$, то можно подобрать последовательность $\omega_n \in \overset{0}{W}{}_2^{2m}(G)$ так, чтобы для $n = 1, 2, \dots$ выполнялось неравенство

$$\| \overset{0}{u} - \overset{0}{v}_n - \omega_n \|_k < \frac{1}{n}. \tag{14}$$

Полагая $z_n = v_n + \omega_n$ из (13) и (14), получаем $\| u - z_n \|_k \leqslant \frac{c+1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Итак, мы подобрали последовательность $z_n \in W_2^{2m}(\text{гр})$, которая стремится к u в норме $\|\cdot\|_k$. Лемма доказана.

Перейдем теперь к исследованию гомеоморфизма Λ_s. Начнем со случая $-2m \leqslant s < 0$. Соотношение $\Lambda_s u = f$ $(u \in H_{2m+s}(\text{гр}),\ f \in H_s(\text{гр})^+)$ эквивалентно тождеству

$$(L^+\varphi, u) = (\varphi, f) \quad (\varphi \in H_{-s}(\text{гр})^+ \cap W_2^{2m}(G)). \tag{15}$$

Из теоремы о гомеоморфизмах, примененной к сопряженной задаче $(L^+, (\text{гр})^+)$, имеем

$$|(L^+\varphi, u)| \leqslant c \| u \|_{2m+s} \| \varphi \|_{-s} \tag{16}$$

для $\varphi \in H_{-s}(\text{гр})^+ \cap W_2^{2m}(G)$, а также и для $\varphi \in N^+$, так как в последнем случае выражение слева равно нулю. Обозначим через m_j' порядок выражения B_j' (где $\{B_j'\}_{j=1}^m$ — сопряженная к $\{B_j\}_{j=1}^m$ система граничных операторов); пусть $m_j' < -s$ для $j = 1, \dots, q$ $(0 \leqslant q \leqslant m)$. Согласно лемме 2 к пространству $H_{-s}(\text{гр})^+$ принадлежат те и только те функции $v \in W_2^{-s}(G) \ominus N^+$, которые удовлетворяют граничным условиям $B_j' v|_\Gamma = 0$ $(j = 1, \dots, q)$. Оценка (16) обеспечивает непрерывность функционала $l(\varphi) = (L^+\varphi, u)$ над пространством $M_{-s}(\text{гр})^+$. Согласно теореме 2 возможно представление

$$(L^+\varphi, u) = \sum_{j=J} \langle \frac{\partial^j \varphi}{\partial \nu^j}, Q_j u \rangle \quad (\varphi \in M_{-s}(\text{гр})^+), \tag{17}$$

где J обозначает множество всех целых чисел из интервала $[0, -s-1]$, не содержащихся в последовательности $\{m_r'\}_{r=1}^q$, а $Q_j u \in W_2^{-s-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Из оценки (16) следует, что отображение $H_{2m+s}(\text{гр}) \ni u \to l \in [M_{-s}(\text{гр})^{+}]^{*}$ непрерывно. Согласно теореме 2 отображение $u \to Q_j u$ также непрерывно, так как оно является произведением непрерывных отображений. Теперь мы можем точно сформулировать граничную задачу, порожденную гомеоморфизмом Λ_s.

Теорема 3. *Пусть $-2m \leqslant s < 0$ и пусть для $j = 1, \dots, p$ выполнено неравенство $m_j < 2m + s$. Граничная задача**

$$Lu = g, \quad B_j u = 0 \ (j = 1, \dots, p), \quad Q_j u = h_j \ (j \in I)$$

разрешима при любых $g \in \overset{0}{W}{}_2^{s}(G)$, $h_j \in W_2^{-s-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, если только выполнено соотношение ортогональности

$$(\varphi, g) + \sum_{j \in I} \langle \frac{\partial^j \varphi}{\partial \nu^j}, h_j \rangle = 0 \ (\varphi \in N^{+}).$$

Решение принадлежит пространству $W_2^{2m+s}(G)$ и определено с точностью до слагаемого, принадлежащего пространству N. Если предположить, что $u \in H_{2m+s}(\text{гр})$, то оно непрерывно зависит от g, h_j. Число граничных условий задачи равно m.

Доказательство. Доказательство всех утверждений теоремы, кроме последнего, легко получается из (15) после разбиения функционала $\hat{f}$ на внутреннюю и граничную части (см. пункт 1). Надо только использовать теорему о гомеоморфизмах и теорему 2. Осталось вычислить число l граничных условий. Множество I содержит $-s-q$ элементов, поэтому $l = p - s - q$. Обозначим через l_i, l_i' соответственно порядки выражений C_i, C_i' ($\{C_j\}$, $\{C_j'\}$ дополняют системы $\{B_j\}$, $\{B_j'\}$ соответственно до систем Дирихле порядка $2m$, эти выражения фигурируют в формуле Грина (см., например, [3], стр. 236)). Можем предположить, что последовательности $\{m_i\}$ и $\{l_i\}$ возрастают. Так как $0 \leqslant m_i < 2m + s$ для $i = 1, \dots, p$, то неравенство $l_i < 2m + s$ выполнено для $i = 1, \dots, 2m + s - p$. Из равенства $m_i' + l_i = 2m - 1$ получаем, что $-s \leqslant m_i' < 2m$ для $i = 1, \dots, 2m + s - p$. Для остальных $i = 2m + s - p + 1, \dots, m$ выполняется неравенство $0 \leqslant m_i' < -s$, поэтому $q = m - (2m + s) - p$. Но тогда $l = m$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай $s < -2m$. Как и в предыдущем случае, соотношение $\Lambda_s u = \hat{f}$ $(u \in H_{2m+s}, \hat{f} \in H_s(\text{гр})^{+})$ эквивалентно (15). Поступая так же, как и в случае $-2m \leqslant s < 0$, можем доказать непрерывность функционала $l(\varphi) = (L^{+}\varphi, u)$ над $M_{-s}(\text{гр})^{+}$. Согласно теореме 2

$$(L^{+}\varphi, u) = \sum_{j \in K} \langle \frac{\partial^j \varphi}{\partial \nu^j}, Q_j u \rangle \quad (\varphi \in M_{-s}(\text{гр})^{+}),$$

где K обозначает множество всех целых чисел из интервала $[0, -s-1]$, не содержащихся в последовательности $\{m_i'\}_{i=1}^{q}$, а $Q_j u$ принадлежит $W_2^{-s-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. При этом отображение $u \to Q_j u$ непрерывно.

Граничную задачу, порожденную гомеоморфизмом Λ_s $(s < -2m)$, получаем как и выше, разделяя функционал $\hat{f}$ на внутреннюю и граничную части. Надо только иметь в виду, что теперь u само является функционалом, поэтому имеет место разложение $u = u_G + u_\Gamma$. Итак, в этом случае справедлива следующая теорема.

* Производные в выражении L надо понимать в слабом смысле.

Теорема 4. *Пусть $s < -2m$. Граничная задача*

$$Lu_G = g,$$

$$Q_j u = h_j \qquad (j \in K)$$

разрешима при любых $g \in \overset{0}{W}{}_2^{s}(G)$, $h_j \in W_2^{-s-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, *если только выполнено условие ортогональности*

$$(\varphi, g) + \sum_{j \in K} \langle \frac{\partial^j \varphi}{\partial \nu^j}, h_j \rangle = 0 \quad (\varphi \in N^+).$$

Решение $u = u_G + u_\Gamma$ *является функционалом над* $W_2^{-2m-s}(G)$ *и определено однозначно с точностью до слагаемого, принадлежащего к* N. *Если предположить, что* $u \in H_{2m+s}$, *то оно непрерывно зависит от* g, h_j.

Заметим, что теперь количество граничных условий равно $-s-m$. Граничную часть функционала u_Γ согласно теореме 1 можно отождествить с набором $-2m-s$ обобщенных функций на Γ. Разность $(-s-m) - (-2m-s)$ равна m. В этом смысле можно считать, что на внутреннюю часть u_G наложено m граничных условий.

3. Граничные задачи, соответствующие гомеоморфизмам в случае неоднородных граничных условий. В этом пункте будем пользоваться обозначениями работы [2]. Докажем лемму.

Лемма 3. *Пусть* $0 < k < 2m$ *и такое, что для* $j = 1, \ldots, p$ *имеет место неравенство* $0 \leqslant l_j < k$, *а для* $j = p+1, \ldots, m$ *выполняется противоположное неравенство. Если* $K_{\left(k, k-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})_p$ *множество векторов вида* $(u, C_1 u, \ldots, C_p u)$ $(u \in W_2^k(G))$ *с нормой прямой суммы пространств* $W_2^k(G) \oplus \sum_{j=1}^{p} W_2^{k-l_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, *то* $K_{\left(2m, 2m-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})$ *плотно в* $K_{\left(k, k-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})_p \oplus \sum_{j=p+1}^{m} W_2^{k-l_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольные $u \in W_2^k(G)$, $u_j \in W_2^{k-l_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ $(j = p+1, \ldots, m)$. Найдется последовательность $v_n \in W_2^{2m}(G)$ такая, что

$$\left\langle\!\left\langle \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} - \frac{\partial^j v_n}{\partial \nu^j} \right\rangle\!\right\rangle_{k-j-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{n} \qquad (j = 0, 1, \ldots, k-1; \quad n = 1, 2, \ldots); \tag{18}$$

$$\langle\!\langle u_j - C_j v_n \rangle\!\rangle_{k-l_j-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{n} \quad (j = p+1, \ldots, m). \tag{19}$$

Используя ортогональное разложение $W_2^k(G) = \overset{0}{W}{}_2^k(G) \oplus M_k(G)$, получаем представления

$$v_n = \overset{0}{v}_n + v_n', \quad u = \overset{0}{u} + u',$$

где $\overset{0}{v}_n$, $\overset{0}{u} \in \overset{0}{W}{}_2^k(G)$, а v_n', $u' \in M_k(G)$. Так как $\overset{0}{W}{}_2^{2m}(G)$ плотно в $\overset{0}{W}{}_2^k(G)$, то можно подобрать последовательность $\omega_n \in \overset{0}{W}{}_2^{2m}(G)$ такую, что

$$\|\overset{0}{u} - \overset{0}{v}_n - \omega_n\|_k \leqslant \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{20}$$

Неравенство (18) справедливо и для u', v'_n. Это обеспечивает существование константы $c > 0$ (не зависящей от n) такой, что

$$\| u' - v'_n \|_2 \leqslant \frac{c}{n}. \qquad (21)$$

Положим теперь $z_n = v_n + \omega_n$. Из (20), (21) следует, что $z_n \to u$ в пространстве $W_2^k(G)$, поэтому $C_j z_n \to C_j u$ в пространстве $W_2^{k-l_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ для $j = 1, \dots, p$. Так как $C_j v_n = C_j z_n$ для всех j, то из неравенства (19) имеем $C_j z_n \to u_j$ в $W_2^{k-l_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ $(j = p+1, \dots, m)$. Лемма доказана.

Полная теорема о гомеоморфизмах [2] утверждает, что замыкание Λ_s оператора, действующего по закону $(u, C_1 u, \dots, C_m u) \to (Lu, B_1 u, \dots, B_m u)$, осуществляет следующий гомеоморфизм: $P_{\hat{N}} K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр}) \to$
$\to P_{\hat{N}^+} K'_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+$.

В случае $s \geqslant 0$ эта теорема обеспечивает разрешимость граничной задачи

$$Lu = f, \quad B_j u = g_j \ (j = 1, 2, \dots, m)$$

в пространстве $W_2^{2m+s}(G)$ при хорошо известных условиях ортогональности и регулярности правых членов f, g_j.

Исследуем более подробно случай отрицательного s. Соотношение $\Lambda_s U = F$ $\left(U \in P_{\hat{N}} K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр}),\ F \in P_{\hat{N}^+} K'_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+\right)$ эквивалентно тождеству

$$(\Lambda_s^+ \Phi, U) = (\Phi, F) \quad \left(\Phi \in K_{\left(-s, -s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+\right). \qquad (22)$$

Пусть сначала $-2m < s < 0$. Предположим, что $l'_j < -s$ для $j = 1, \dots$ $\dots, q$ и что для остальных j выполнено противоположное неравенство. Согласно лемме 3 Φ имеет вид

$$\Phi = (\varphi, C'_1 \varphi, \dots, C'_q \varphi, \varphi_{q+1}, \dots, \varphi_m),$$

где $\varphi \in W_2^{-s}(G)$, $\varphi_j \in W_2^{-s-l'_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ $(j = q+1, \dots, m)$. Из теоремы о гомеоморфизмах следует, что

$$|(\Lambda_s^+ \Phi, U)| \leqslant c \|U\|_{K_{\left(2m+s, 2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})} \|\Phi\|_{K_{\left(-s, -s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+}. \qquad (23)$$

Обозначим через X подпространство пространства $K_{\left(-s, -s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+$, состоящее из векторов вида $(\varphi, C'_1 \varphi, \dots, C'_q \varphi, \varphi_{q+1}, \dots, \varphi_m)$, где $\varphi \in M_{-s}(G)$. $\Phi \in X$ определено однозначно функцией φ, при этом норма $\|\varphi\|_{-s}$ эквивалентна норме Φ в пространстве $K_{\left(-s, -s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+$. Поэтому из оценки (23) следует, что линейная форма $l(\varphi) = (\Lambda_s^+ \Phi, U)$ $(\Phi \in X)$ определяет непрерывный функционал над пространством $M_{-s}(G)$. По теореме 1 эта форма представима в виде

$$(\Lambda_s^+ \Phi, U) = \sum_{j=0}^{-s-1} \left\langle \frac{\partial^j \varphi}{\partial \nu^j}, S_j U \right\rangle \ (\Phi \in X), \qquad (24)$$

где $S_j U \in W_2^{s+j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Чтобы исследовать правую часть (22), найдем общее представление функционала F над пространством $K_{\left(-s, -s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+$ (конечно, пространство сопряженное к $K_{\left(-s, -s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+$ благодаря соотношению $m_j + l'_j = 2m-1$ совпадает с $K'_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+$). Согласно лемме 3

$$K_{\left(-s, -s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+ = K_{\left(-s, -s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})_q^+ \oplus \sum_{j=q+1}^{m} W_2^{-s-l'_j-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Обозначая $Y = K_{\left(-s, -s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})_q^+$, получаем

$$K'_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+ = Y^* \oplus \sum_{j=q+1}^{m} W_2^{s+l'_j+\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Любой функционал $l \in Y^*$ записывается в виде $l(V) = (v, g) + \sum_{j=1}^{q} \langle C'_j v, g_j\rangle$ $(V \in Y)$, где $g \in W_2^s(G)$, $g_j \in W_2^{s+l'_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Согласно сказанному в пункте 1, функционал g можно представить в виде суммы его внутренней g_G и граничной g_Γ частей. Легко проверить, что g_G однозначно определяется функционалом l. Действительно, если $l(V) = 0$ для $V \in Y$, то, подставляя в качестве v произвольную финитную функцию, получаем $g_G = 0$. Граничная часть g_Γ и обобщенные функции g_j $(j = 1, \ldots, q)$ уже не определяются однозначно. Два различных набора $\{g_\Gamma, g_j\}$ и $\{\widetilde{g}_\Gamma, \widetilde{g}_j\}$ соответствуют одному и тому же функционалу l, если выполнено тождество

$$(v, g_\Gamma) + \sum_{j=1}^{q} \langle C'_j v, g_j\rangle = (v, \widetilde{g}_\Gamma) + \sum_{j=1}^{q} \langle C'_j v, \widetilde{g}_j\rangle \; (v \in M_{-s}(G)). \tag{25}$$

Перебрасывая тангенциальные производные в выражениях C'_j на правый член, получаем

$$\sum_{j=1}^{q} \langle C'_j v, g_j\rangle = \sum_r \left\langle \frac{\partial^r v}{\partial \nu^r}, f_r\right\rangle,$$

при этом нормальные производные в правой части равенства имеют порядок не выше, чем $-s-1$. Представляя выражение (v, g_Γ) в виде (8), получаем после приведения слагаемых с той же нормальной производной

$$l(V) = (v, g_G) + \sum_{j=0}^{-s-1} \left\langle \frac{\partial^j v}{\partial \nu^j}, h_j\right\rangle \quad (V \in Y),$$

где $h_j \in W_2^{s+j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Отметим, что h_j однозначно определены функционалом l. Итак, правая часть (22) представима в виде

$$(\Phi, F) = (\varphi, g_G) + \sum_{j=0}^{-s-1} \left\langle \frac{\partial^j \varphi}{\partial \nu^j}, h_j\right\rangle + \sum_{j=q+1}^{m} \langle \varphi_j, g_j\rangle, \tag{26}$$

где $g_j \in W_2^{s+l'_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ $(j=q+1, \dots, m)$. При этом g_0, h_j, g_j однозначно определяются функционалом F. Легко проверить, что отображение $F \to (g_0, \{h_j\}_{j=0}^{-s-1}, \{g_j\}_{j=q+1}^{m})$ осуществляет гомеоморфизм $K'_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+ \to \overset{0}{W}{}_2^{s}(G) \dotplus \sum_{j=1}^{-s-1} W_2^{s+j+\frac{1}{2}}(\Gamma) \dotplus \sum_{j=q+1}^{m} W_2^{s+l'_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Пусть $l_j < 2m+s$ для $j = 1, \dots, p$ и пусть для остальных j выполнено противоположное неравенство. Согласно лемме 3 вектор U имеет вид $U = (u, C_1u, \dots, C_pu, u_{p+1}, \dots \dots, u_m)$, где $u \in W_2^{2m+s}(G)$, $u_j \in W_2^{2m+s-l_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ $(j = p+1, \dots, m)$. Предполагая, что $\varphi \in C_0^\infty(G)$, из (22) получаем, что u является слабым решением уравнения

$$Lu = g_0. \tag{27}$$

Найдем граничные условия, порожденные тождеством (22). Предположим сначала $\Phi \in X$, тогда в правой части (26) первое и третье слагаемые отсутствуют. Сравнивая с (24), видим, что из (22) следует

$$S_jU = h_j\ (j = 0, 1, \dots, -s-1). \tag{28}$$

Предположим, что $\Phi = (0, \dots, 0, \varphi_{q+1}, \dots, \varphi_m)$, где φ_j $(j = q+1, \dots, m)$ — произвольная обобщенная функция из $W_2^{-s-l'_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Тогда из формулы Грина следует

$$(A^+\Phi, U) = \sum_{j=q+1}^{m} \langle \varphi_j, B_j u \rangle. \tag{29}$$

Пусть теперь $\varphi_j = 0$ для $j \neq r$ и пусть φ_r пробегает все пространство $W_2^{-s-l'_r-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Сравнивая (29) с (26), из (22) получаем

$$B_j u = g_j \quad (j = q+1, \dots, m). \tag{30}$$

Согласно сказанному выше обобщенные функции g_0, h_j, g_j однозначно определяют функционал F. Если U удовлетворяет условиям (27), (28), (30), то выполняется также равенство (22). В таком смысле граничная задача (27), (28), (30) эквивалентна равенству (22) и, конечно, зависит от способа продолжения системы $\{B_j\}_{j=1}^{m}$ до системы Дирихле порядка $2m$.

Итак, мы доказали, что из теоремы о гомеоморфизмах следует теорема.

Теорема 5. *Пусть* $-2m < s < 0$ *и*

1) $l_r < 2m+s$ *для* $r = 1, \dots, p$,

2) $l'_j < -s$ *для* $j = 1, \dots, q$;

3) *для остальных* r, j *выполнены противоположные неравенства. Тогда граничная задача*

$$Lu = f, \quad B_ju = g_j\ (j = q+1, \dots, m), \quad S_jU = h_j\ (j = 0, 1, \dots, -s-1)$$

разрешима при произвольных $f \in W_2^{s}(G)$, $g_j \in W_2^{s+l'_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $h_j \in W_2^{s+j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$, *если только выполнено условие ортогональности*

$$(\varphi, f) + \sum_{j=0}^{-s-1} \left\langle \frac{\partial^j \varphi}{\partial \nu^j}, h_j \right\rangle + \sum_{j=q+1}^{m} \langle C'_j \varphi, g_j \rangle = 0 \quad (\varphi \in N^+).$$

Решение имеет вид $U = (u, C_1 u, \ldots, C_p u, u_{p+1}, \ldots, u_m)$, *где* $u \in W_2^{2m+s}(G)$, $u_j \in W_2^{2m+s-t_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *для* $j = p+1, \ldots, m$ *и однозначно определено с точностью до слагаемого вида* $(v, C_1 v, \ldots, C_m v)$, *где* $v \in N$. *Если предположить, что* $U \in P_{\hat{N}} K_{\left(2m+s, 2m+s-t_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр), *то* U *непрерывно зависит от* f, g_j, h_j.

Определим сколько граничных условий накладывает на u граничная задача, описанная теоремой 5. Так как $C_j u$ для $j = 1, \ldots, p$ однозначно определены выбором u, то U однозначно определяется функцией u и набором $m - p$ «добавочных элементов»—обобщенных функций на границе Γ: $u_{p+1}, \ldots$ $\ldots, u_m$. На U наложено l граничных условий, где $l = m - q - s$. Покажем, что

$$l - (m - p) = m. \tag{31}$$

В таком смысле можно считать, что на u наложено как раз m граничных условий. Но это легко следует из того факта, что системы $\{B_j\}$ и $\{C_j\}$ дополняют друг друга до системы Дирихле порядка $2m$. Поэтому неравенство

$$m_j < 2m + s \tag{32}$$

выполнено как раз для $2m + s - p$ индексов j. Благодаря соотношению $m_j + t_j = 2m - 1$ и предположениям 2), 3) теоремы 5 неравенство (32) выполняется для $j = q + 1, \ldots, m$, поэтому $2m + s - p = m - q$, что и дает требуемое равенство (31).

Осталось рассмотреть случай $s \leqslant -2m$. В этом случае $K_{\left(2m+s, 2m+s-t_j-\frac{1}{2}\right)}$(пр) является просто прямой суммой $W_2^{2m+s}(G) \oplus \sum_{j=1}^{m} W_2^{2m+s-t_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, поэтому все граничные условия будут порождены правым членом F гомеоморфизма. Как и в предыдущем случае, из теоремы о гомеоморфизмах следует, что выражение

$$(\Lambda_s^+ \Phi, U) \tag{33}$$

определяет непрерывный функционал от $\Phi \in K_{\left(-s, -s-t_j'-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+$. Причем Φ имеет вид

$$\Phi = (\varphi, C_1' \varphi, \ldots, C_m' \varphi),$$

где $\varphi \in W_2^{-s}(G)$, и однозначно определяется функцией φ, при этом для $\varphi \in M_{-s}(G)$ норма $\|\varphi\|_{-s}$ эквивалентна норме $\|\Phi\|_{K_{\left(-s, -s-t_j'-\frac{1}{2}\right)}}(\text{пр})^+$. Поэтому выражение (33) является непрерывным функционалом от $\varphi \in M_{-s}(G)$ и согласно теореме 1 представимо в виде

$$(\Lambda_s^+ \Phi, U) = \sum_{i=0}^{-s-1} \left\langle \frac{\partial^i \varphi}{\partial \nu^i}, S_i U \right\rangle \quad (\varphi \in M_{-s}(G)). \tag{34}$$

Применяя такие же рассуждения, как и в случае $-2m < s < 0$, легко доказать, что правая часть (22) представима в виде

$$(\Phi, F) = (\varphi, f) + \sum_{j=0}^{-s-1} \left\langle \frac{\partial^j \varphi}{\partial \nu^j}, h_j \right\rangle, \tag{35}$$

где $f\in \overset{0}{W}{}_2^s(G)$, $h_j\in W_2^{s+j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$. При этом отображение $F=(f,\ \{h_j\}_{j=0}^{-s-1})$ является гомеоморфизмом

$$K_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^{\perp}\to \overset{0}{W}{}_2^s(G)\times\sum_{j=0}^{-s-1} W_2^{s+j+\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Из (22), (34) и (35) следует, что соотношение $\Lambda_s U = F$ эквивалентно граничной задаче

$$Lu_G = f,\quad S_jU = h_j\quad (j=0,1,\dots,-s-1),$$

где $U=(u,u_1,\dots,u_m)$. Таким образом, из теоремы о гомеоморфизмах получаем следующую теорему о разрешимости граничной задачи.

Теорема 6. *Пусть $s\leq -2m$. Тогда граничная задача*

$$Lu_G = f,\quad S_jU = h_j\quad (j=0,1,\dots,-s-1)$$

разрешима при произвольных $f\in \overset{0}{W}{}_2^s(G)$, $h_j\in W_2^{s+j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$, если только выполнено условие ортогональности

$$(\varphi,f)+\sum_{j=0}^{-s-1}\left\langle \frac{\partial^j\varphi}{\partial\nu^j},\ h_j\right\rangle=0\quad (\varphi\in N^+).$$

Решение имеет вид $U=(u,u_1,\dots,u_m)$, где $u\in W_2^{2m+s}(G)$, $u_j\in W_2^{2m+s-l_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ для $j=1,\dots,m$. Оно однозначно определено с точностью до слагаемого вида $(v,C_1v,\dots,C_mv)$, где $v\in N$. Если предположить, что $U\in P_2 K_{\left(2m+s,2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})$, то U непрерывно зависит от f, h_j.

Заметим, что первый член u вектора U является теперь функционалом над соболевским пространством $W_2^{-(2m+s)}(G)$; поэтому имеет место разложение $u=u_G+u_\Gamma$. Согласно теореме 1 граничная часть u_Γ определяется однозначно набором $-(2m+s)$ обобщенных функций на Γ. Таким образом, вектор U можно понимать как набор, составленный из обобщенной функции $u_G\in W_2^{2m+s}(G)$ и $-(2m+s)$ «добавочных элементов» (которые являются обобщенными функциями на Γ). Так как число граничных операторов S_j равно s, можно считать, что на решение u_G наложено $-s+(m+s)=m$ граничных условий.

4. Дополнительные замечания. Очевидно, теоремы о гомеоморфизмах, а также все полученные выше результаты остаются верными после введения в пространстве $W_2^l(G)$ какого-нибудь другого скалярного произведения

$$[u,v]_l=\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq l}(a_{\alpha\beta}D^\alpha u, D^\beta v),$$

если только оно определяет норму, еквивалентную норме $\|\cdot\|_l$. Коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми в G. Тогда формула Грина (1) принимает вид

$$[\varphi,u]_l=(\varphi,\tilde{\Lambda}_l u)+\sum_{j=0}^{l-1}\left\langle \frac{\partial^j\varphi}{\partial\nu^j},\ \tilde{T}_{l,j}u\right\rangle \tag{36}$$

где

$$\widetilde{\Delta}_l u = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\widetilde{a}_{\alpha\beta} D^\beta u),$$

а $\widetilde{T}_{l,j}$ — граничные дифференциальные выражения порядка $2l - j - 1$ ($\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — орт внешней нормали). Конечно, как ортогональное дополнение $M_l(G)$, так и вид выражений $\widetilde{T}_{l,j}$ и операторов Q_j, S_j, определенных выше, зависит от определения коэффициентов $a_{\alpha\beta}$. Поэтому граничные задачи, сформулированные в теоремах 3—6, не определяются однозначно гомеоморфизмом Λ_s.

Покажем теперь на примере какой вид принимают операторы Q_i, порожденные гомеоморфизмом Λ, в случае однородных граничных условий. Рассмотрим в n-мерной ограниченной области G с бесконечно дифференцируемой границей граничную задачу типа Дирихле

$$-\Delta u + u = 0,$$

$$u|_\Gamma = 0.$$

Как известно, эта задача эллиптическая, формально самосопряженная и однозначно разрешима, поэтому $N = N^+ = \{0\}$.

Пусть для произвольного фиксированного $s = -2, -3, \ldots$, u принадлежит пространству $W_2^{2+s}(G)$. Из теоремы о гомеоморфизмах следует, что выражение $(-\Delta\varphi + \varphi, u)$ определяет линейный непрерывный функционал от $\varphi \in W_2^{-s}$ (гр). По теореме Рисса, примененной к скалярному произведению $[\cdot, \cdot]_{-s}$, существует функция $\omega \in W_2^{-s}$ (гр) такая, что

$$(-\Delta\varphi + \varphi, u) = [\varphi, \omega]_{-s} \qquad (\varphi \in W_2^{-s}(\text{гр})). \tag{37}$$

При этом отображение $R_s : W_2^{2+s}(G) \ni u \to \omega \in W^{-s}$ (гр) является гомеоморфизмом. Тогда

$$Q_j u = \widetilde{T}_{-s,j} P_s R_s u, \tag{38}$$

где P_s — оператор ортогонального проектирования на подпространство $M_{-s}(G) = W_2^{-s}(G) \ominus \overset{\circ}{W}{}_2^{-s}(G)$ (ортогональная проекция и вычитание в смысле скалярного произведения $[\cdot, \cdot]_{-s}$). Чтобы истолковать вид операторов P_s, R_s, докажем сначала следующую лемму.

Лемма 4. *Обозначим через* $(\widetilde{\text{гр}})$ *граничные условия*

$$v|_\Gamma = 0, \tag{39}$$

$$\widetilde{T}_{-s,j} v|_\Gamma = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, -s-1). \tag{40}$$

Тогда пространство $W_2^{-2s}(\widetilde{\text{гр}})$ *плотно в* W_2^{-s} (гр).

Доказательство по существу такое же, как и доказательство леммы 2. Надо только заметить, что граничное дифференциальное выражение $\widetilde{T}_{l,j}$ можно для любых l, j привести к виду

$$\widetilde{T}_{l,j} v = c_{l,j}(x) \frac{\partial^{2l-j-1} v}{\partial \nu^{2l-j-1}} + T'_{l,j} v,$$

где $c_{l,j}(x) = \sum_{|\alpha| = |\beta| = l} a_{\alpha\beta}(x) \nu^{\alpha+\beta}$ $(x \in \Gamma)$, а $T'_{l,j}$ — граничные выражения, содержащие только нормальные производные низшего порядка. Так как по предположению нормы $|v, v|_l$ и $\|v\|_l$ эквивалентны в пространстве $W^l_2(G)$, то выражение $\widetilde{\Lambda}_l$ является сильно эллиптическим и коэффициент $c_{l,l}$ по модулю ограничен снизу положительной константой. Поэтому из граничных условий (40) можно определить нормальные производные порядка $-s$, $-s+1, \ldots, -2s-1$ через нормальные производные низших порядков.

Будем рассматривать оператор R_s на множестве $U_s = R_s^{-1} W_2^{-2s}(\widetilde{\text{гр}})$. Согласно лемме 4 оно плотно в пространстве $W_2^{1+s}(G)$. Из (36), (37) получаем для $u \in U_s$ тождество

$$(-\Delta\varphi + \varphi, u) = (\varphi, \widetilde{\Lambda}_{-s} R_s u) \qquad (\varphi \in W_2^{-s}(\text{гр})),$$

из которого следует, что $u \in \mathfrak{D}(\Lambda_0^{\cdot})$ и

$$\Lambda_0^{\cdot} u = -\widetilde{\Lambda}_{-s} R_s u \tag{41}$$

где Λ_0 обозначает оператор: $W_2^2(\text{гр}) \ni \varphi \to -\Delta\varphi + \varphi \in L_2(G)$ (как известно, он самосопряжен). Если граничные выражения, определяющие $(\widetilde{\text{гр}})$, накрывают выражение $\widetilde{\Delta}_{-s}$, то отображение

$$W_2^{-2s}(\widetilde{\text{гр}}) \ni f \to \widetilde{\Lambda}_{-s} f \in L_2(G)$$

является гомеоморфизмом. Обозначая через $(\widetilde{\Lambda}_{-s})^{-1}$ обратный гомеоморфизм, из (41) получаем

$$R_s u = (\widetilde{\Lambda}_{-s})^{-1} \Lambda_0^{\cdot} u \qquad (u \in U_s).$$

Оператор $(\widetilde{\Lambda}_{-s})^{-1}$ является интегральным (см. [1] гл. III, § 5) в том смысле, что для финитных непрерывных f, g справедливо тождество

$$((\widetilde{\Delta}_{-s})^{-1} f)(x) = \int\limits_G\int\limits_G F_s(x, y) f(x) g(y)\, dx dy.$$

Для $s < -\frac{n}{4}$ ядро $F_s(x, y)$ — типа Карлемана и

$$((\widetilde{\Delta}_{-s})^{-1} f)(x) = \int\limits_G F_s(x, y) f(y)\, dy$$

для любого $f \in L_2(G)$. В этом случае оператор R_s допускает на множестве U_s представление

$$(R_s u)(x) = \int\limits_G F_s(x, y)(-\Delta u(y) + u(y))\, dy.$$

Обратимся теперь к оператору P_s. Нам будет достаточно исследовать его вид на множестве $W_2^{-2s}(\widetilde{\text{гр}})$. По определению

$$P_s w = w - \overset{0}{w},$$

где $\overset{0}{w}$ обозначает ортогональную проекцию w на подпространство $\overset{0}{W}{}_2^{-s}(G)$. Так как для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции φ

справедливо тождество $0 = [\varphi, w - \overset{0}{w}]_{-s} = (\widetilde{\Delta}_{-s}\varphi, w - \overset{0}{w})$, функция $\overset{0}{w}$ является решением граничной задачи

$$\widetilde{\Delta}_{-s} z = f, \qquad z \in \overset{0}{w}{}_2^{-s}(G),$$

где $f = \widetilde{\Lambda}_{-s} w \in L_2(G)$. По теореме о гомеоморфизмах $\overset{'}{w}$ принадлежит $W_2^{-2s}(G)$, при этом $\|\overset{'}{w}\|_{-2s} \leqslant \mathrm{const}\, \|f\|_{L_2(G)}$. Поэтому отображение $w \to \overset{0}{w}$ также может быть описано посредством интеграла в том смысле, что

$$(\overset{'}{w}, \psi) = \iint\limits_{GG} \mathfrak{H}_s(x, y) \widetilde{\Lambda}_{-s} w(x) \psi(y)\, dx dy$$

для любой финитной непрерывной функции $\psi \in C^{-2s}(G)$. Для $s < -\frac{n}{4}$ ядро $\mathfrak{H}_s(x, y)$ является ядром Карлемана и справедливо равенство

$$\overset{'}{w}(x) = \int\limits_{G} \mathfrak{H}_s(x, y) \widetilde{\Delta}_{-s} w(y)\, dy.$$

В этом случае

$$P_s w = w - \int\limits_{G} \mathfrak{H}_s(x, y) \widetilde{\Lambda}_{-s} w(y)\, dy \qquad (w \in W^{-2s}(G)).$$

Тогда, согласно тождеству (38), граничный оператор Q_j $(j = 1, 2, \ldots, -s-1)$ допускает на множестве U_s представление в виде суперпозиции дифференциальных и интегральных выражений.

Для завершения наших рассуждений укажем простой пример скалярного произведения $[\cdot, \cdot]_{-s}$, для которого выполнено условие накрывания выражения $\widetilde{\Delta}_{-s}$ граничными выражениями, определяющими (гр). Пусть

$$[u, v]_l = \sum_{j=0}^{l} \sum_{1 \leqslant k_1, \ldots, k_j \leqslant n} (D_{k_1} \ldots D_{k_j} u, D_{k_1} \ldots D_{k_j} v)_{L_2(G)}.$$

Тогда для $l = -s = 2$

$$\widetilde{\Delta}_2 u = u - \sum_{k=1}^{n} D_k^2 u + \sum_{k,r=1}^{n} D_k^2 D_r^2 u$$

и

$$\widetilde{T}_{\nu,1} u = \sum_{k,r=1}^{n} \nu_k \nu_r D_k D_r u.$$

Условие накрывания в этом случае обозначает, что полиномы $Q_0(\zeta) = 1$ и $Q_1(\zeta) = \zeta^2$ должны быть линейно независимыми по модулю полинома $P_+(\zeta) = (\zeta - i|\tau|)^2$.

Это очевидно, так как из тождества

$$c_1 + c_2\zeta^2 = \alpha(\zeta - i|\tau|)^2$$

(α, c_1, c_2 — постоянные, $\tau \in R_{n-1}$) следует $2i\alpha|\tau| = 0$ и поэтому для $\tau \neq 0$ получаем $\alpha = c_1 = c_2 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений, ДАН СССР, т. 148, № 4, 1963.
2. Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач, УМЖ, т. 19, № 5, 1967.
3. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», К., 1965.
4. E. Magenes, Spazi di interpolatione ed equazioni a derivate parziali, Conferenza tenuta al VII Congresso dell'UMI, Genova, 30 settembre—5 octobre 1963 (Русс. перевод: УМН, т. 21, № 2, 1966).
5. L. Schwartz, Théore des distributions, Paris, 1951.
6. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, М., 1958.
7. J. J. Lions, E. Magenes, Problemes aux limites non homogènes. (II), Ann. Inst. Fourier, N 11, 1961.
8. Л. Н. Слободецкий, Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных, Уч. зап. ЛГУ, 197, 1958.
9. G. de Rham, Varietes differentiables, Paris, 1955 (Русс. перевод: Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1957).
10. M. Schechter, Coerciveness in L^p, Transactions of the Amer. Math. Soc., 107, N 1, 1963.

Поступила 21.XI 1967 г.
Институт математики НАН