1969 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 21, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.949.2

Интегральные многообразия для нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

В. И. Фодчук

Введение. Пусть E_n — действительное или комплексное n-мерное линейное векторное пространство, $|\cdot|$ — любая векторная норма в E^n и пусть $C_{[a,b]}$ (a, b — любые действительные числа) — пространство непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций со значениями в E^n, $\|\cdot\|$ — норма в $C_{[a,b]}$, определяемая соотношением: $\|\varphi\| = \sup\limits_{a\leqslant\theta\leqslant b} |\varphi(\theta)|$, $\varphi \in C_{[a,b]}$. Пусть далее Δ, σ — действительные числа, $\Delta > 0$ и $x(t)$ — любая непрерывная на $[\sigma - \Delta, \infty)$ функция. Для любого фиксированного $t \geqslant \sigma$ под x_t будем понимать элемент пространства $C_{[-\Delta,0]}$, заданный функцией $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-\Delta \leqslant \theta \leqslant 0$, т. е. при каждом фиксированном $t \geqslant \sigma$ x_t есть сужение функции $x(t)$ на $[t - \Delta, t]$, сдвинутое на $[-\Delta, 0]$*.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x_t) + \varepsilon F(t, x_t), \tag{1}$$

где $\frac{dx}{dt}$ обозначает правую производную функции $x(t)$, $x \in E^n$, $f(x_t)$ — линейный функционал, определенный на $C_{[-\Delta,0]}$, $F(t, x_t)$ — функция со значениями в E^n, определенная для $t \in (-\infty, \infty)$, $x_t \in C_{[-\Delta,0]}$, ε — малый положительный параметр.

Полагая в (1) $\varepsilon = 0$ и обозначая для удобства x через u, получим невозмущенное уравнение

$$\frac{du}{dt} = f(u_t), \tag{2}$$

которое является линейным однородным дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом. Общая теория таких уравнений достаточно хорошо разработана в работах [1—6] и др. Необходимые сведения из этой теории мы изложим в §1.

Настоящая работа посвящена исследованию возмущенного уравнения (1) с помощью метода интегральных многообразий, развитого Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским [7—9]. Отметим, что изучению интегральных многообразий для уравнения с запаздыванием вида (1) посвящена работа Дж. К. Хейла [10], однако мы здесь рассматриваем этот вопрос при других, более общих предположениях относительно правой части (1) и в несколько иной постановке. Интегральные многообразия для систем с за-

* В данной статье мы используем обозначения, введенные Дж. К. Хейлом [2].

паздыванием, приведенных к стандартной форме, исследовались в [11, 12], для других классов систем с запаздыванием — в [13, 14].

§1. Исследование невозмущенного уравнения. Так как функционал $f(x_t)$, заданный на $C_{[-\Delta,0]}$, линеен, то по теореме Рисса [15] он выражается с помощью интеграла Стильтьеса:

$$f(x_t) = \int_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta)]\, x(t+\theta),$$

где $[d\eta(\theta)]$ — квадратная матрица, элементами которой являются функции с ограниченным изменением.

Характеристическое уравнение для (2) имеет вид

$$\operatorname{Det}\left(\lambda I - \int_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta)]\, e^{\lambda\theta}\right) = 0. \tag{3}$$

Пусть $\varphi = \varphi(\theta)$ — заданная функция, $\varphi(\theta)\in C_{[-\Delta,0]}$. Решением уравнения (2) с начальной функцией φ при $t = (\sigma =)\,0$ называется функция $u_t(\theta, \varphi) = u_t(\varphi)$, $u_t(\varphi) \in C_{[-\Delta,0]}$, $0 \leqslant t \leqslant h$, удовлетворяющая при $t\in[0, h]$ уравнению (2), а при $t = 0$ — условию $u_0(\varphi) = \varphi$.

Решение уравнения (2) существует на промежутке $[0, \infty]$, единственно и непрерывно зависит от начальных данных [3], [16].

Определим оператор сдвига по траекториям уравнения (2)

$$U(t)\varphi = u_t(\varphi).$$

Семейство $\{U(t),\ t \geqslant 0\}$ является однопараметрическим семейством линейных преобразований, отображающих $C_{[-\Delta,0]}$ в $C_{[-\Delta,0]}$ и образующих сильно непрерывную полугруппу [1, 2], т. е. для него выполняются требования:

$$U(t+\tau) = U(t)\,U(\tau),\quad U(0) = I \quad (t \geqslant 0,\ \tau \geqslant 0),$$

$\lim\limits_{\tau\to t} \|U(\tau)\varphi - U(t)\varphi\| = 0$ для всех $t \geqslant 0$ и любого $\varphi\in C_{[-\Delta,0]}$. Производящий оператор

$$A\varphi = \lim_{t\to +0} \frac{1}{t}\,(U(t) - I)\,\varphi$$

полугруппы $U(t)$ является оператором дифференцирования:

$$A\varphi(\theta) = \frac{d}{dt}\,\varphi(\theta) = \dot\varphi(\theta)$$

с областью определения

$$D(A) = \{\varphi\in C_{[-\Delta,0]} : \dot\varphi\in C_{[-\Delta,0]},\ \dot\varphi(0) = f(\varphi)\};$$

$D(A)$ плотно в $C_{[-\Delta,0]}$ и, кроме того, для всех $\varphi\in D(A)$

$$\frac{d}{dt}\,U(t)\,\varphi = U(t)\,A\varphi = AU(t)\,\varphi. \tag{4}$$

Спектр $\sigma(A)$ оператора A состоит только из точечного спектра и не более чем счетен. Следовательно, все точки $\sigma(A)$ являются собственными значениями оператора A. Это утверждение следует из того, что $\lambda_i\in\sigma(A)$ тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет характеристическому уравнению (3), а уравнение (3) имеет только конечное число корней, лежащих в любой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha$ (α-любое действительное число), и каждый из этих корней имеет конечную кратность [2]. Таким образом резольвентный оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ имеет в каждой точке $\lambda_i \in \sigma(A)$ полюс конечной кратности, а собственное многообразие $\mathfrak{M}_{\lambda_i}(A)$ оператора A, соответствующее собственному значению λ_i, конечномерно.

Если λ — корень уравнения (3) кратности k, то уравнение (2) имеет k линейно независимых решений $u_i(t) = p_i(t)e^{\lambda t}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, где $p_i(t)$ — полиномы с коэффициентами из E^n степени $\leqslant k-1$. Положим $\varphi_i(0) = u_i(0)$, $-\Delta \leqslant 0 \leqslant 0$. Тогда $\Phi_\lambda = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$ будет базисом в порожденном этими решениями в $C_{[-\Delta,0]}$ собственном подпространстве $R(\lambda)$*. Это подпространство инвариантно относительно оператора $U(t)$ [2].

Так как $AR(\lambda) \subset R(\lambda)$, то существует такая $k \times k$-матрица B_λ, что $A\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda$, причем все собственные значения матрицы B_λ равны λ. Отсюда следует, что

$$\Phi_\lambda(0) = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda \theta}, \quad -\Delta \leqslant \theta \leqslant 0. \tag{5}$$

Кроме того, на основании (4) и (5) имеем

$$U(t)\Phi_\lambda(0) = \Phi_\lambda(0)\,e^{B_\lambda (t+\theta)}, \quad -\Delta \leqslant 0 \leqslant 0,\ t \in (-\infty, \infty).$$

Пусть теперь $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ — конечное число корней характеристического уравнения (3), $\Phi_\Lambda = (\Phi_{\lambda_1}, \ldots, \Phi_{\lambda_m})$, Φ_{λ_i} — базис в $R(\lambda_i)$, $B_\Lambda = \operatorname{diag}(B_{\lambda_1}, \ldots, B_{\lambda_m})$, B_{λ_i} — матрица, определяемая соотношением: $A\Phi_{\lambda_i} = \Phi_{\lambda_i}B_{\lambda_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Тогда для начальной функции $\varphi = \Phi_\Lambda b$, где b — любой вектор той же размерности, что и Φ_Λ, решение $u_t(\varphi)$ уравнения (2) имеет вид

$$u_t(\varphi) = U(t)\varphi = \Phi_\Lambda e^{B_\Lambda t} b, \quad \Phi_\Lambda(0) = \Phi_\Lambda(0)e^{B_\Lambda \theta}, \quad -\Delta \leqslant 0 \leqslant 0, \tag{6}$$

причем решение $u_t(\varphi)$ определено для всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Заметим, что если функционал $f(x_t)$ в (2) действительный, то комплексные корни уравнения (3) будут попарно сопряженными и в этом случае матрицы Φ_Λ и B_Λ могут быть выбраны действительными.

Разложим пространство $C_{[-\Delta,0]}$ в прямую сумму двух подпространств [2]:

$$C_{[-\Delta,0]} = R(\Lambda) \oplus Q(\Lambda), \quad R(\Lambda) = \{\varphi \in C_{[-\Delta,0]} : \varphi = \Phi_\Lambda b\}, \tag{7}$$

$Q(\Lambda)$ — подпространство, дополнительное к $R(\Lambda)$. Подпространство $Q(\Lambda)$ также инвариантно относительно $U(t)$.

Дадим явное определение подпространства $Q(\Lambda)$, используя для этого понятие «сопряженного» к (2) уравнения. Тем самым мы явно определим операторы проектирования P_R и P_Q пространства $C_{[-\Delta,0]}$ на подпространства $R(\Lambda)$ и $Q(\Lambda)$, что весьма важно для приложений.

Рассмотрим сопряженное уравнение

$$\frac{dv}{ds} = -\int_{-\Delta}^{0}[d\eta^*(\theta)]\,v(s-\theta), \quad s \leqslant 0, \tag{8}$$

где звездочка обозначает транспонирование. Соответствующее (8) характеристическое уравнение имеет те же корни, что и уравнение (3), и для каждого корня существует решение уравнения (8) вида $e^{-\lambda s}b$ (b — постоянный n-

---

* Под собственным подпространством $R(\lambda)$ мы понимаем наименьшее линейное многообразие, содержащее те элементы $\varphi \in C_{[-\Delta,0]}$, для которых $(\lambda I - A)^i\varphi = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

вектор), определенное для всех $s \in (-\infty, \infty)$. Если $\psi = \psi(\tau)$ — заданная функция, $\psi(\tau) \in C_{[0,\Delta]}$, то решение $v_s(\psi)$ уравнения (8) с начальной функцией ψ при $\tau = (\sigma =) 0$ существует на промежутке $(-\infty, 0]$, единственно и непрерывно зависит от начальных данных.

Пусть $\varphi \in C_{[-\Delta,0]}$, $\psi \in C_{[0,\Delta]}$. Рассмотрим билинейный функционал [4]:

$$(\psi(0), \varphi(0)) = \psi^*(0)\varphi(0) - \int_{-\Delta}^{0}\int_{0}^{\theta} \psi^*(\xi - \theta)[d\eta(\theta)]\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

Если φ и ψ — решения соответственно уравнений (2) и (8), то на общем участке существования этих решений функционал (9) имеет постоянное значение. В этом легко убедиться непосредственным вычислением.

Пусть $R(\Lambda)$ — определенное ранее (7) подпространство $C_{[-\Delta,0]}$, Φ_Λ — базис в $R(\Lambda)$, а $R^*(\Lambda)$ — такое же подпространство $C_{[0,\Delta]}$ и Ψ_Λ — базис в $R^*(\Lambda)$. Так как матрица $(\Psi_\Lambda, \Phi_\Lambda) = ((\psi_i, \varphi_j))$ неособенная, то базис Φ_Λ можно выбрать таким образом, чтобы $(\Psi_\Lambda, \Phi_\Lambda) = I_m$, где I_m — единичная $m \times m$ матрица. Отсюда, в частности, будет следовать, что $\Psi(\tau) = \Psi(0)e^{-B_\Lambda^*\tau}$, $0 \leqslant \tau \leqslant \Delta$, где B_Λ^* — транспонированная по отношению к B_Λ матрица.

Теперь подпространства $R(\Lambda)$ и $Q(\Lambda)$ можно определить следующим образом [2, 10]:

$$\begin{aligned} R(\Lambda) &= \{\varphi \in C_{[-\Delta,0]} : \varphi = \Phi_\Lambda(\Psi_\Lambda, \varphi)\}, \\ Q(\Lambda) &= \{\varphi \in C_{[-\Lambda,0]} : (\Psi_\Lambda, \varphi) = 0\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Поэтому для каждого элемента $\varphi \in C_{[-\Delta,0]}$ имеется единственное представление

$$\varphi = \varphi^R + \varphi^Q, \qquad \varphi^R \in R(\Lambda), \qquad \varphi^Q \in Q(\Lambda). \tag{11}$$

Операторы P_R и P_Q, определенные равенствами

$$P_R\varphi = \varphi^R, \qquad P_Q\varphi = \varphi^Q, \tag{12}$$

являются проекционными операторами, причем для них справедливы соотношения

$$P_R U(t) = U(t) P_R, \qquad P_Q U(t) = U(t) P_Q. \tag{13}$$

§ 2. Преобразование возмущенного уравнения. Перейдем к изучению уравнения (1). Рассмотрим общий случай распределения корней характеристического уравнения (3). Пусть, например, k корней уравнения (3) лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \alpha > 0$ (α — некоторое действительное число), l корней — в полосе $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant \alpha$, а остальные корни — в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < -\alpha$. Обозначим

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k : \operatorname{Re}\lambda_i > \alpha \ (i = 1, 2, \ldots, k)\}, \\ \Lambda_2 &= \{\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{k+l} : |\operatorname{Re}\lambda_{k+i}| \leqslant \alpha \ (i = 1, 2, \ldots, l)\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Пусть $R_1 = R(\Lambda_1)$, $R_2 = R(\Lambda_2)$ — соответствующие Λ_1 и Λ_2 собственные подпространства $C_{[-\Delta,0]}$, а $\Phi_1 = \Phi_{\Lambda_1}$, $\Phi_2 = \Phi_{\Lambda_2}$ — соответственно базисы в R_1 и R_2. Аналогично предыдущему определим подпространства $R_1^* = R^*(\Lambda_1)$, $R_2^* = R^*(\Lambda_2)$ и базисы $\Psi_1 = \Psi_{\Lambda_1}$, $\Psi_2 = \Psi_{\Lambda_2}$, причем базисы Φ_1 и Φ_2 выберем так, чтобы $(\Psi_1, \Phi_1) = I_k$, $(\Psi_2, \Phi_2) = I_l$, где I_k, I_l — единичные матрицы соответствующих размерностей. Тогда пространство $C_{[-\Delta,0]}$, которое в дальнейшем будем обозначать через C, можно разложить в прямую сумму трех подпространств:

$$
\begin{aligned}
& C = R_1 \dotplus R_2 \dotplus Q, \\
& R_1 = \{\varphi \in C : \varphi = \Phi_1(\Psi_1, \varphi)\}, \\
& R_2 = \{\varphi \in C : \varphi = \Phi_2(\Psi_2, \varphi)\}, \\
& Q = \{\varphi \in C : ((\Psi_1, \Psi_2), \varphi) = 0\}.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Пусть $x(t)$ решение уравнения (1) с начальной функцией $x_\sigma(\theta)$ при $t = \sigma$, $x_\sigma(\theta) \in C$, $\sigma - \Delta \leqslant \theta \leqslant \sigma$.

Согласно [17, 6, 18] уравнение (1) эквивалентно интегральному уравнению

$$
\begin{aligned}
& x(t) = U(t-\sigma)x_\sigma(0) + \varepsilon \int_\sigma^t X(t-\tau)F(\tau, x_\tau)\,d\tau, \qquad t \geqslant \sigma, \\
& x(t) = x_\sigma(t-\sigma), \qquad \sigma - \Delta \leqslant t \leqslant \sigma,
\end{aligned} \tag{16}
$$

где $X(t)$ — $n \times n$-матрица, удовлетворяющая при $t \geqslant 0$ уравнению (2) с начальной функцией $X_0(\theta)$:

$$
X_0(\theta) = 0, \qquad -\Delta \leqslant \theta < 0, \qquad X_0(0) = I_n. \tag{17}
$$

Заменяя в (16) t на $t + \theta$ и учитывая, что в силу (17)

$$
\int_t^{t+\theta} X(t+\theta-\tau)F(\tau, x_\tau)\,d\tau = 0,
$$

получаем

$$
\begin{aligned}
& x(t+\theta) = U(t+\theta-\sigma)x_\sigma(0) + \varepsilon \int_\sigma^t X(t+\theta-\tau)F(\tau, x_\tau)\,d\tau, \qquad t+\theta \geqslant \sigma, \\
& x(t+\theta) = x_\sigma(t+\theta-\sigma), \qquad \sigma - \Delta \leqslant t+\theta \leqslant \sigma, \qquad -\Delta \leqslant \theta \leqslant 0.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Если $u_t(\theta)$ — решение уравнения (2) с начальной функцией $x_\sigma(\theta)$ при $t = \sigma$, то для него справедливы равенства

$$
\begin{aligned}
& u_t(\theta) = U(t-\sigma)x_\sigma(\theta) = U(t+\theta-\sigma)x_\sigma(0), \qquad t+\theta \geqslant \sigma, \\
& u_t(\theta) = U(t-\sigma)x_\sigma(\theta) = x_\sigma(t+\theta-\sigma), \qquad t+\theta \leqslant \sigma, \qquad -\Delta \leqslant \theta \leqslant 0.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Так как матрица $X(t)$ является решением уравнения (2) с начальной функцией $X_0(\theta)$ при $t = 0$, то, полагая $X(t+\theta) = X_t(\theta)$, имеем

$$
X(t+\theta-\tau) = X_{t-\tau}(\theta) = U(t-\tau)X_0(\theta), \qquad t \geqslant \tau. \tag{20}
$$

Учитывая (17), (19) и (20), уравнение (18) можно записать в виде

$$
x_t(\theta) = U(t-\sigma)x_\sigma(\theta) + \varepsilon \int_\sigma^t U(t-\tau)X_0(\theta)F(\tau, x_\tau)\,d\tau, \quad t \geqslant \sigma, \quad -\Delta \leqslant \theta \leqslant 0. \tag{21}
$$

Представим функции $x_t(\theta)$ и $X_0(\theta)$ в виде

$$
\begin{aligned}
& x_t = P_{R_1}x_t + P_{R_2}x_t + P_Q x_t = x_t^{R_1} + x_t^{R_2} + x_t^Q, \\
& x_t^{R_i} = \Phi_i y_i(t) = \Phi_i(\Psi_i, x_t) \qquad (i = 1, 2), \qquad ((\Psi_1, \Psi_2), x_t^Q) = 0,
\end{aligned} \tag{22}
$$

$$
X_0 = P_{R_1}X_0 + P_{R_2}X_0 + P_Q X_0 = X_0^{R_1} + X_0^{R_2} + X_0^Q, \tag{23}
$$

$$X_0^{R_i} = \Phi_i(\Psi_i, X_0) \qquad (i = 1, 2), \qquad ((\Psi_1, \Psi_2), X_0^Q) = 0,$$

Поскольку оператор $U(t)$ линеен и для него имеют место равенства (13), то уравнение (21) допускает расщепление на три уравнения

$$x_t^{R_i} = U(t-\sigma)\, x_\sigma^{R_i} + \varepsilon \int_\sigma^t U(t-\tau)\, X_0^{R_i} F(\tau, x_\tau^{R_1} + x_\tau^{R_2} + x_\tau^Q)\, d\tau, \qquad (i = 1, 2).$$

$$x_t^Q = U(t-\sigma)\, x_\sigma^Q + \varepsilon \int_\sigma^t U(t-\tau)\, X_0^Q F(\tau, x_\tau^{R_1} + x_\tau^{R_2} + x_\tau^Q)\, d\tau. \tag{24}$$

Из (23), (9) и (17) находим

$$X_0^{R_i} = \Phi_i(\Psi_i, X_0) = \Phi_i \Psi_i^*(0) \qquad (i = 1, 2). \tag{25}$$

Тогда на основании (6) и (25)

$$U(t-\tau)\, X_0^{R_i}(0) = U(t-\tau)\, \Phi_i \Psi_i^*(0) = \Phi_i e^{B_i(t-\tau)} \Psi_i^*(0) \qquad (i = 1, 2), \tag{26}$$

где B_i — постоянная матрица, множество собственных значений которой совпадает с Λ_i.

Аналогично из (22) (при $t = \sigma$) и (6) получаем

$$U(t-\sigma)\, x_\sigma^{R_i} = U(t-\sigma)\, \Phi_i(\Psi_i, x_\sigma) =$$

$$= \Phi_i e^{B_i(t-\sigma)} (\Psi_i, x_\sigma) = \Phi_i e^{B_i(t-\sigma)} b_i \qquad (i = 1, 2). \tag{27}$$

Учитывая (22), (26) и (27), запишем первые два уравнения системы (24) в виде

$$\Phi_i y_i(t) = \Phi_i e^{B_i(t-\sigma)} b_i + \varepsilon \int_\sigma^t \Phi_i e^{B_i(t-\tau)} \Psi_i^*(0)\, F(\tau, \Phi_1 y_1(\tau) +$$

$$+ \Phi_2 y_2(\tau) + x_\tau^Q)\, d\tau \qquad (i = 1, 2).$$

Отсюда, принимая во внимание, что Φ_i — базис, состоящий из линейно независимых функций, получаем

$$y_i(t) = e^{B_i(t-\sigma)} b_i + \varepsilon \int_\sigma^t e^{B_i(t-\tau)} \Psi_i^*(0)\, F(\tau, \Phi_1 y_1(\tau) + \Phi_2 y_2(\tau) + x_\tau^Q)\, d\tau \quad (i = 1, 2). \tag{28}$$

Дифференцируя последнее равенство по t, окончательно находим

$$\frac{dy_i}{dt} = B_i y_i(t) + \varepsilon \Psi_i^*(0)\, F(t, \Phi_1 y_1(t) + \Phi_2 y_2(t) + x_t^Q) \qquad (i = 1, 2). \tag{29}$$

Таким образом, система (21), а следовательно, и система (1) с помощью преобразования координат (22) сведена к эквивалентной интегро-дифференциальной системе

$$\frac{dy_i}{dt} = B_i y_i(t) + \varepsilon \Psi_i^*(0)\, F(t, \Phi_1 y_1(t) + \Phi_2 y_2(t) + x_t^Q) \qquad (i = 1, 2),$$

$$x_t^Q = U(t-\sigma)\, x_\sigma^Q + \varepsilon \int_\sigma^t U(t-\tau)\, X_0^Q F(\tau, \Phi_1 y_1(\tau) + \Phi_2 y_2(\tau) + x_\tau^Q)\, d\tau. \tag{30}$$

§ 3. Исследование интегральных многообразий. В этом параграфе мы будем рассматривать уравнение (1) при тех же предположениях, что и в § 2, и докажем, что это уравнение обладает интегральным многообразием. Для доказательства используем схему Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [7—9], а также ее обобщение на случай банахова пространства [19]. Для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, рассматриваемых в эвклидовом пространстве, аналогичное утверждение доказано в [11, 12].

Представим пространство $C_{[-\Delta,0]}$ в виде прямой суммы двух подпространств:

$$C_{[-\Delta,0]} = R_2 \oplus \widetilde{C}_{[-\Delta,0]},$$

где $\widetilde{C}_{[-\Delta,0]} = R_1 \oplus Q$. Если в пространстве $\widetilde{C}_{[-\Delta,0]}$ ввести норму: $\|z_t\| = \|(x_t^{R_1}, x_t^Q)\| = \|x_t^{R_1}\| + \|x_t^Q\|$, $z_t \in \widetilde{C}_{[-\Delta,0]}$, $x_t^{R_1} \in R_1$, $x_t^Q \in Q$, то оно, как и пространство $C_{[-\Delta,0]}$, будет линейным нормированным пространством, элементы которого — непрерывные на сегменте $[-\Delta, 0]$ функции. В дальнейшем пространства $C_{[-\Delta,0]}$ и $\widetilde{C}_{[-\Delta,0]}$ будем обозначать соответственно через C и $\widetilde{C}$, опуская внизу индекс $[-\Delta, 0]$. Вектор y_2 будем обозначать через y. Тогда, на основании доказанного в § 1, 2, имеет место разложение

$$\begin{gathered} x_t = \Phi_2 y(t) + z_t, \qquad x_t \in C, \qquad y \in E^l, \qquad z_t \in \widetilde{C}, \\ y(t) = (\Psi_2, x_t), \qquad (\Psi_2, z_t) = 0, \end{gathered} \tag{31}$$

а система (30) имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{dy(t)}{dt} = B_2 y(t) + \varepsilon \Psi_2^*(0) F(t, \Phi_2 y(t) + z_t), \\ z_t = U(t-\sigma) z_\sigma + \varepsilon \int_\sigma^t U(t-\tau) X_0^{\widetilde{C}} F(\tau, \Phi_2 y(\tau) + z_\tau)\, d\tau, \end{gathered} \tag{32}$$

где $X_0^{\widetilde{C}} = P_{\widetilde{C}} X_0$.

Определение. Пусть $g(t, y)$ — некоторая функция со значениями в $\widetilde{C}$, определенная для $t \in (-\infty, \infty)$, $y \in E^l$, ограниченная

$$\|g(t, y)\| \leqslant \varrho \qquad (t \in (-\infty, \infty),\ y \in E^l) \tag{33}$$

и удовлетворяющая условию Липшица

$$\|g(t, y') - g(t, y'')\| \leqslant \gamma |y' - y''|. \tag{34}$$

Пусть, далее, $y(t) = y(t, \sigma, y_0)$ — решение уравнения

$$\frac{dy}{dt} = B_2 y + \varepsilon \Psi_2^*(0) F(t, \Phi_2 y + g(t, y)) \tag{35}$$

с начальным условием $y(\sigma, \sigma, y_0) = y_0$, $\sigma \in (-\infty, \infty)$, $y_0 \in E^l$. Будем говорить, что множество $\widetilde{S}$:

$$\widetilde{S} = \{(t, y, \zeta) : t \in (-\infty, \infty),\ y \in E^l,\ \zeta = g(t, y),\ \zeta \in \widetilde{C}\} \tag{36}$$

является интегральным многообразием системы (32), если из того, что $y(t, \sigma, y_0)$ есть решение уравнения (35) при любых $\sigma \in (-\infty, \infty)$, $y_0 \in E^l$, следует, что функции $y(t) = y(t, \sigma, y_0)$, $z_t = g(t, y(t))$ представляют собой решение системы (32), определенное для всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Таким образом, по определению, интегральное многообразие $\tilde{S}$ есть множество в пространстве $(-\infty, \infty) \times E^l \times \tilde{C}$ целиком лежащее в цилиндре (33), состоящее из траекторий системы (32) и обладающее тем свойством, что если какая-нибудь траектория системы (32) имеет хотя бы одну общую точку с $\tilde{S}$, то она целиком лежит в S.

З а м е ч а н и е 1. Из разложения (31) следует, что если $\tilde{S}$ — интегральное многообразие системы (32), то множество S:

$$S = \{(t, \Phi_2 y + \zeta) : t \in (-\infty, \infty), \quad \Phi_2 y \in R_2, \quad \zeta = g(t, y), \quad \zeta \in \hat{C}\} \tag{37}$$

является интегральным многообразием уравнения (21) и, следовательно, уравнения (1).

З а м е ч а н и е 2. Если траектория x_t уравнения (1) лежит на многообразии S, а $P_{R_2} x_t = \Phi_2 y(t)$ — его проекция на подпространство R_2, то вся траектория x_t определяется формулой

$$x_t = \Phi_2 y(t) + z_t = \Phi_2 y(t) + g(t, y(t)), \tag{38}$$

где $y(t)$ является решением уравнения (35).

З а м е ч а н и е 3. Так как решение $(y(t), g(t, y(t)))$ системы (32), лежащее на многообразии $\tilde{S}$, определено для всех $t \in (-\infty, \infty)$, а функция $g(t, y)$ в силу условия (33) ограничена на всей вещественной оси, то $z_t = g(t, y(t))$ должно удовлетворять уравнению (см. [17, 12, 19])

$$z_t = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} V(\tau - t) F(\tau, \Phi_2 y(\tau) + z_\tau) \, d\tau, \tag{39}$$

где

$$V(t) = \begin{cases} U(t) X_0^{R_1}, & t \geq 0, \\ -U(t) X_0^{Q}, & t < 0, \end{cases} \tag{40}$$

$y(t)$ — решение уравнения (35).

Итак, вопрос об исследовании интегральных многообразий дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом (1) сведен к вопросу об исследовании интегральных многообразий системы (32), в которой первое уравнение является конечномерным обыкновенным дифференциальным уравнением, а второе — интегральным уравнением с запаздывающим аргументом в функциональном пространстве.

Обозначая $F_1(t, y, z_t) = F(t, \Phi_2 y + z_t)$, $F_2(t, y, z_t) = \Psi_2(0) F(t, \Phi_2 y + z_t)$, запишем систему (32) в виде

$$\begin{gathered} \frac{dy}{dt} = B_2 y + \varepsilon F_2(t, y, z_t), \\ z_t = U(t - \sigma) z_\sigma + \varepsilon \int_\sigma^t U(t - \tau) X_0^{\tilde{Q}} F_1(\tau, y(\tau), z_\tau) \, d\tau. \end{gathered} \tag{41}$$

Т е о р е м а. *Пусть функция* $F_1(t, y, \varphi)$ *определена и непрерывна для* $t \in (-\infty, \infty)$, $y \in E^l$, $\varphi \in \tilde{C}$, *и удовлетворяет условиям*

$$\begin{gathered} |F_1(t, y, \varphi)| \leq M, \\ |F_1(t, y', \varphi') - F_1(t, y'', \varphi'')| \leq \nu(|y' - y''| + \|\varphi' - \varphi''\|), \end{gathered} \tag{42}$$

где M, ν — некоторые постоянные. Тогда для любых $\varrho > 0$, $\gamma > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что для каждого $\varepsilon < \varepsilon_0$ система (41) *обладает единственным интегральным многообразием вида* (36), *где функция g определена для $t \in (-\infty, \infty)$, $y \in E^l$ и удовлетворяет условиям* (33), (34).

Доказательство. Возьмем некоторые положительные числа ϱ, γ и рассмотрим класс $L(\varrho, \gamma)$ функций $G(t, y)$ со значениями в $\widetilde{C}$, определенных для $t \in (-\infty, \infty)$, $y \in E^l$ и удовлетворяющих условиям (33), (34) с нормой $|||G||| = \sup\limits_{t, y} \| G(t, y)\|$. Для некоторой функции $G(t, y) \in L(\varrho, \gamma)$ рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dt} = B_2 y + \varepsilon F_2(t, y, G(t, y)). \tag{43}$$

Так как функция $F_1(t, y, \varphi)$ (а следовательно, и функция $F_2(t, y, \varphi)$) удовлетворяет условиям (42), а функция $G(t, y)$ — условиям (33), (34), то при каждых $\sigma \in (-\infty, \infty)$, $y_0 \in E^l$, уравнение (43) обладает единственным решением, которое обозначим через

$$Y = Y(z, \sigma, y_0, G) \qquad (z = t - \sigma,\ t \in (-\infty, \infty)), \tag{44}$$

причем $Y(0, \sigma, y_0, G) = y_0$. Легко проверить, что решение Y удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(t) = e^{B_2(t-\sigma)} y_0 + \varepsilon \int\limits_{\sigma}^{t} e^{B_2(t-\tau)} F_2[\tau, y(\tau), G(\tau, y(\tau))]\, d\tau. \tag{45}$$

По предположению (см. § 2), l корней характеристического уравнения (3), являющихся собственными значениями матрицы B_2, лежат в полосе $|\operatorname{Re}\lambda| < \alpha$, k корней — в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$, а остальные корни — в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < -\alpha$. Поэтому для функций Грина $e^{B_2 t}$ и $V(t)$ (40) справедливы оценки

$$|e^{B_2 t}| \leqslant K e^{(\alpha - \beta)|t|}, \tag{46}$$

$$\| V(t) \| \leqslant K e^{-(\alpha + \beta)|t|}, \tag{47}$$

где $K = K(\beta)$, α, β — некоторые положительные постоянные. Далее, из (13), (17) и (40) имеем

$$V(-0) - V(+0) = \lim_{t \to 0} (U(t) P_{R_1} X_0 + U(t) P_Q X_0) =$$

$$= \lim_{t \to 0} U(t) (P_{R_1} + P_Q) X_0 = \lim_{t \to 0} U(t) X_0 (P_{R_1} + P_Q) = I_n P_{\widetilde{C}}, \tag{48}$$

где I_n — единичная $n \times n$-матрица.

Пусть $\overline{Y} = Y(t-\sigma, \sigma, \overline{y}_0, \overline{G})$, $Y = Y(t-\sigma, \sigma, y_0, G)$ — два решения уравнения (43), соответствующие двум функциям $\overline{G}(t, y)$, $G(t, y)$ из класса $L(\varrho, \gamma)$ и удовлетворяющие начальным условиям

$$Y(0, \sigma, \overline{y}_0, \overline{G}) = \overline{y}_0, \qquad Y(0, \sigma, y_0, G) = y_0. \tag{49}$$

Оценим разность $\overline{Y} - Y$. На основании (45), (46), (42) и (34) имеем

$$|\overline{Y} - Y| \leqslant K e^{(\alpha-\beta)|t-\sigma|} |\overline{y}_0 - y_0| +$$

$$+ \varepsilon K m \nu \int\limits_{\sigma}^{t} e^{(\alpha-\beta)|t-\tau|} (|||\overline{G} - G||| + (1+\gamma)|\overline{Y} - Y|)\, d\tau,$$

где $m = |\Psi_2^*(0)|$.

Пусть, например, $t \geqslant \sigma$. Полагая

$$|\overline{Y}-Y|\, e^{-(\alpha-\beta)(t-\sigma)} = w(t), \qquad |\overline{y}_0 - y_0| = w_0,$$

запишем последнее неравенство в виде

$$w(t) \leqslant Kw_0 + \varepsilon K m\nu\, |||\overline{G}-G|||\int_\sigma^t e^{(\alpha-\beta)(\sigma-\tau)}d\tau + \varepsilon K m\nu(1+\gamma)\int_\sigma^t w(\tau)\,d\tau$$

или

$$w(t) \leqslant Kw_0 + \varepsilon K_1 |||\overline{G}-G|||\,(1-e^{-(\alpha-\beta)(t-\sigma)}) + \varepsilon K_2\int_\sigma^t w(\tau)\,d\tau,$$

где $K_1 = Km\nu(\alpha-\beta)^{-1}$, $K_2 = Km\nu(1+\gamma)$.

Решая это интегральное неравенство, находим

$$w(t) \leqslant Kw_0 e^{\varepsilon K_2(t-\sigma)} + \varepsilon K_3\, |||\overline{G}-G|||\,(e^{\varepsilon K_2(t-\sigma)} - e^{-(\alpha-\beta)(t-\sigma)}),$$

где $K_3 = K_1\left(1-\dfrac{\varepsilon K_2}{\alpha-\beta+\varepsilon K_2}\right)$.

Следовательно,

$$|\overline{Y}-Y| \leqslant Ke^{(\alpha-\beta+\varepsilon K_2)(t-\sigma)}\,|\overline{y}_0-y_0| + \varepsilon K_3\, |||\overline{G}-G|||\,(e^{(\alpha-\beta+\varepsilon K_2)(t-\sigma)}-1). \tag{50}$$

Аналогично получаем такую же оценку при $t \leqslant \sigma$.

Докажем теперь, что функция $g(t, y)$, определяющая интегральное многообразие $\hat{S}$, является решением интегро-функционального уравнения

$$G(t, y) = \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} V(s)\,F_1[t+s,\, Y(s, t, y, G),\; G(t+s, Y(s, t, y, G))]\,ds$$

$$(t\in(-\infty,\infty),\; y\in E^l) \tag{51}$$

в классе $L(\varrho, \gamma)$. Для этого докажем сначала, что при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varrho, \gamma)$ — постоянная, которую мы определим ниже) уравнение (51) имеет единственное решение в классе $L(\varrho, \gamma)$.

Запишем уравнение (51) символически в виде $G = T_{t,y}G$ и покажем, что при $\varepsilon<\varepsilon_0$ преобразование $T_{t,y}$ переводит класс функций $L(\varrho, \gamma)$ в себя и является сжатием.

Из условий (42) и свойств функций класса $L(\varrho, \gamma)$ вытекают неравенства

$$|F_1[t+s, Y(s, t, y, G), G(t+s, Y(s, t, y, G))]| \leqslant M+\nu\varrho, \tag{52}$$

$$|F_1[t+s, \overline{Y}, \overline{G}(t+s, \overline{Y})] - F_1[t+s, Y, G(t+s, Y)]| \leqslant$$
$$\leqslant \nu(|||\overline{G}-G||| + (1+\gamma)\,|\overline{Y}-Y|). \tag{53}$$

Мажорируя правую часть (51) с учетом (47) и (52), получаем:

$$|||T_{t,y}(G)||| \leqslant \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} Ke^{-(\alpha+\beta)|s|}(M+\nu\varrho)\,ds = \frac{2\varepsilon K}{\alpha+\beta}(M+\nu\varrho). \tag{54}$$

Согласно (51), (53) и (50) находим

$$|||T_{t,\bar{y}_0}(\bar{G})-T_{t,y_0}(G)|||\leqslant\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}Ke^{-(\alpha+\beta)|s|}\nu\,(|||\bar{G}-G|||+$$

$$+(1+\gamma)|\bar{Y}-Y|)\,ds\leqslant\varepsilon K\nu\,|||\bar{G}-G|||\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\alpha+\beta)|s|}ds+$$

$$+\varepsilon K\nu(1+\gamma)K|\bar{y}_0-y_0|\int_{-\infty}^{\infty}e^{(-2\beta+\varepsilon K_2)|s|}\,ds+$$

$$+\varepsilon K\nu(1+\gamma)\varepsilon K_3\,|||\bar{G}-G|||\int_{-\infty}^{\infty}(e^{(-2\beta+\varepsilon K_2)|s|}-e^{-(\alpha+\beta)|s|})\,ds=$$

$$=[\varepsilon K^2\nu(1+\gamma)|\bar{y}_0-y_0|+\varepsilon^2KK_3\nu(1+\gamma)\,|||\bar{G}-G|||]\int_{-\infty}^{\infty}e^{(-2\beta+\varepsilon K_2)|s|}ds+$$

$$+\frac{2\varepsilon K\nu}{\alpha+\beta}[1-\varepsilon K_3(1+\gamma)]\,|||\bar{G}-G|||. \tag{55}$$

Возьмем теперь такое $\varepsilon_0>0$, чтобы для всех $\varepsilon<\varepsilon_0$ выполнялись неравенства:

$$\frac{2\varepsilon K}{\alpha+\beta}(M+\nu\varrho)<\varrho,\qquad \varepsilon K_2<\beta,$$

$$\frac{2\varepsilon K^2\nu}{\beta}(1+\gamma)<\gamma,\qquad \frac{4\varepsilon K\nu}{\alpha+\beta}[1+\alpha(1+\gamma)]<1.$$

Тогда вместо неравенств (54) и (55) окончательно получаем

$$|||T_{t,y}(G)|||<\varrho,$$

$$|||T_{t,\bar{y}_0}(\bar{G})-T_{t,y_0}(G)|||\leqslant\gamma|\bar{y}_0-y_0|+\frac{1}{2}|||\bar{G}-G|||,$$

откуда, в частности, следует

$$|||T_{t,\bar{y}_0}(G)-T_{t,y_0}(G)|||\leqslant\gamma|\bar{y}_0-y_0|,$$

$$|||T_{t,y_0}(\bar{G})-T_{t,y_0}(G)|||\leqslant\frac{1}{2}|||\bar{G}-G|||.$$

Таким образом при $\varepsilon<\varepsilon_0$ функция $T_{t,y}(G)$ принадлежит классу $L(\varrho,\gamma)$, а преобразование $T_{t,y}$ является сжатием. Поэтому при $\varepsilon<\varepsilon_0$ уравнение (51) имеет решение в классе $L(\varrho,\gamma)$ и притом единственное. Обозначим его через $g(t,y)$.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что множество $\tilde{S}$, где $g(t,y)$ — определенное выше решение уравнения (51), является интегральным многообразием системы (41).

Пусть $Y(t-\sigma,\sigma,y_0,g)$ — решение уравнения

$$\frac{dy}{dt}=B_2y+\varepsilon F_2(t,y,g(t,y)), \tag{56}$$

удовлетворяющее условию $Y(0, \sigma, y_0, g) = y_0$. По определению функции $g(t, y)$, имеем тождество

$$g(t, y) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} V(s) F_1 [t + s, Y(s, t, y, g), g(t + s, Y(s, t, y, g))] \, ds. \qquad (57)$$

Заменим в нем y на $Y(t - \sigma, \sigma, y_0, g)$ и заметим, что, согласно наших обозначений (44), (49), справедливо тождество:

$$Y(s, t, Y(t - \sigma, \sigma, y_0, g), g) = Y(t + s - \sigma, \sigma, y_0, g).$$

В результате (57) примет вид

$$g(t, Y(t - \sigma, \sigma, y_0, g)) =$$

$$= \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} V(s) F_1 [t + s, Y(t + s - \sigma, \sigma, y_0, g), g(t + s, Y(t + s - \sigma, \sigma, y_0, g))] \, ds. \qquad (58)$$

Вводя в (58) вместо s новую переменную интегрирования $\tau = t + s$ и полагая

$$Y(t - \sigma, \sigma, y_0, g) = y(t), \qquad g(t, Y(t - \sigma, \sigma, y_0, g)) = z_t, \qquad (59)$$

получаем

$$z_t = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} V(\tau - t) F_1 (\tau, y(\tau), z_\tau) \, d\tau.$$

Принимая во внимание замечание 3, заключаем, что функции (59) представляют собой решение системы (41). (или системы (32)), определенное для всех $t \in (-\infty, \infty)$, причем функция $z_t = g(t, y(t))$ удовлетворяет условиям (33), (34).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, М., 1959.
2. J. K. Hale, Linear Functional — Differential Equations with Constant Coefficients, Contrib. Diff. Equat., vol. 2, 1963.
3. А. Д. Мышкис, Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, Гостехиздат, М. — Л., 1951.
4. С. Н. Шиманов, К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием, Дифференциальные уравнения, т. 1, № 1, 1965.
5. А. М. Зверкин, Разложение в ряд решений линейных дифференциально-разностных уравнений, Труды семинара по теор. дифференц. уравн. с откл. аргум., т. IV, М., 1967.
6. А. Халанай, Периодические решения линейных систем с запаздыванием, Rev. de Math. Pures et Appl., Acad. R. P. R., t. VI, N 1, 1961.
7. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
8. Ю. А. Митропольский, Об исследовании интегрального многообразия для систем нелинейных уравнений с переменными коэффициентами, УМЖ, т. X, № 3, 1958.
9. Ю. А. Митропольский, Об исследовании интегрального многообразия для систем нелинейных уравнений, близких к уравнениям с переменными коэффициентами в гильбертовом пространстве, УМЖ, т. XVI, № 3, 1964.
10. J. K. Hale, Averaging Methods for Differential Equations with Retarded Arguments and a Small Parameter, Journ. Diff. Equat., vol., 2, N 1, 1966.
11. В. И. Фодчук, О существовании и свойствах интегрального многообразия для систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и с переменными коэффициентами, Прибл. методы решения дифференц. уравн., Изд-во АН УССР, К., 1963.
12. В. И. Фодчук, Исследование интегральных многообразий для систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, УМЖ, т. 17, № 4, 1965.

13. А. Халанай, Периодические инвариантные многообразия для некоторого класса систем с запаздыванием, Rev. Roum. de Math. pures et Appl., t. X. N 3, 1965.
14. Х. Х. Толоса, Метод усреднения для квазилинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и с периодическими коэффициентами, Труды семинара по теор. дифференц. уравн. с откл. аргум., т. VI, М., 1968.
15. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, «Наука», М., 1965.
16. Л. Э. Эльсгольц, Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, «Наука», М., 1964.
17. В. П. Рубаник, В. И. Фодчук, О существовании и свойствах ограниченного решения системы квазилинейных дифференциально-разностных уравнений, УМЖ т. XIV, № 1, 1962.
18. J. K. Hale, C. Perello, The Neighborhood of a Singular Point of Functional — Differential Equations, Contrib. Diff. Equat., vol. III, N 3, 1965.
19. Ю. Л. Далецкий, Об устойчивых интегральных многообразиях нелинейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве, УМЖ, т. 20, № 3, 1968.

Поступила 14.II 1969 г.
Институт математики АН УССР