1969 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 21, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.942.82

Применение преобразования Лапласа для решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

А. Г. Шевелев

§ 1. Для анализа линейных дифференциальных уравнений может быть применено понятие смещенной функции и преобразование Лапласа как функциональное преобразование смещенных функций.

Смещенными функциями называются функции $y(t-\xi)$, не равные нулю в области значений аргумента $t \geqslant \xi$ и принятые равными нулю при $t < \xi$. Например, $e^{t-\xi}$, $e^{-t^2+\xi^2}$, $e^{\varphi(t)-\varphi(\xi)}$ и др.

Некоторые свойства смещенных функций $y(t-\xi)$ рассматривались в работе [1].

К такому типу функций относятся при определенных условиях решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений как с постоянными, так и с переменными коэффициентами. Если $y(t)$ и $f(t)$ в уравнении

$$a_0(t)\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^n} + \ldots + a_n(t)\,y(t) = f(t) \tag{1.1}$$

определены на интервале $0 \leqslant t \leqslant \infty$ и, кроме того, если ввести некоторое ξ и предположить, что

$$\begin{aligned} y(t-\xi) &= 0 \quad \text{при } t < \xi, \\ y(t-\xi) &= y(t-\xi) \quad \text{при } t \geqslant \xi, \end{aligned} \tag{1.2}$$

и если $f(t)$ можно представить в виде $f(t-\xi)$ и предположить, что $f(t-\xi) = 0$ при $t < \xi$, $f(t-\xi) = f(t-\xi)$ при $t \geqslant \xi$, то дифференциальное уравнение (1.1) можно записать в виде

$$a_0(t)\frac{d^n}{dt^n}y(t-\xi) + a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^n}y(t-\xi) + \ldots + a_n(t)\,y(t-\xi) = f(t-\xi). \tag{1.3}$$

Начальные условия задаются при $t-\xi = 0$, т. е. при $t = \xi$ и равны

$$y^{(i)}(t-\xi)\big|_{t=\xi} = y^{(i)}(0), \qquad i = 0, 1, 2 \ldots n-1.$$

Можно показать, что условия (1.2), накладываемые на функцию $y(t-\xi)$ — решение уравнения (1.1), допустимы.

Для смещенных функций, для которых выполняются ограничения (1.2), может быть применено преобразование Лапласа следующего вида [2, 3]:

$$Y(t;\ s) = \int_{-\infty}^{t} y(t-\xi)\, e^{-s(t-\xi)} d\xi, \tag{1.4}$$

где интегрирование ведется по ξ, t — параметр, $0 \leqslant t \leqslant \infty$, $s = \sigma + j\omega$ — некоторое комплексное переменное.

Изображение в общем случае зависит не только от s, но и от параметра t.

Используя свойства параметрического интеграла (1.4), можно получить формулы изображений и соответствия некоторых операций более общего вида, чем формулы для обычного преобразования

$$Y(s) = \int_{0}^{\infty} y(t)\, e^{-st} dt, \tag{1.5}$$

которые являются частным случаем первых.

Обратное преобразование Лапласа определяется интегралом

$$y(t-\xi) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(t;\ s)\, e^{s(t-\xi)} ds \tag{1.6}$$

для $t \geqslant \xi$, где интегрирование ведется вдоль бесконечной прямой σ.

Допустимость преобразований (1.4) и (1.6) и условия существования изображений и оригиналов по изображениям определяются следующими теоремами.

Т е о р е м а 1. *Если смещенная функция $y(t-\xi)$ аналитическая в окрестности $t=\xi$, где t и ξ — вещественные переменные, заданные на интервале $0 \leqslant t \leqslant \infty$ и $-\infty \leqslant \xi \leqslant t$, то ее изображение существует и определено для всей области $s = \sigma + j\omega$ для которой $\sigma > c$, где c — некоторая постоянная, и это изображение является аналитической функцией в указанной области s.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналитическая функция $y(t-\xi)$ может быть представлена в виде суммы бесконечного ряда Тейлора в окрестности $t=\xi$:

$$y(t-\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n(t)}{n!} (t-\xi)^n. \tag{1.7}$$

где $a_n(t) = \left.\frac{\partial^n y(t-\xi)}{\partial \xi^n}\right|_{\xi=t}$.

Пусть c такое, что

$$|a_n(t)(t-\xi)^n| \leqslant Me^{c(t-\xi)}$$

для любого n. Тогда

$$\left| \int_{-\infty}^{t} a_n(t)(t-\xi)^n e^{-s(t-\xi)} d\xi \right| \leqslant M \int_{-\infty}^{t} e^{-(\sigma-c)(t-\xi)} d\xi = \frac{M}{\sigma - c}. \tag{1.8}$$

На основании этого

$$\left| \int_{-\infty}^{t} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n(t)}{n!} (t-\xi) \right] e^{-s(t-\xi)} d\xi \right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{M}{\sigma - c} \tag{1.9}$$

і изображение (1.4) существует для интервала t, для которого ряд (1.7 сходится.

Продифференцируем $Y(t; s)$ из (1.4), учитывая (1.7), по s:

$$\frac{dY(t; s)}{ds} = -\int_{-\infty}^{t}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{a_n(t)}{n!}(t-\xi)^n\right](t-\xi)\, e^{-s(t-\xi)}\, d\xi. \quad (1.10$$

$y(t-\xi)$	$Y(t; s)$	$y(t-\xi)$	$Y(t; s)$
$y(t-\xi)$	$Y(t; s) = \int_{-\infty}^{t} y(t-\xi) e^{-s(t-\xi)} d\xi$	$y\left(\frac{t-\xi}{a}\right)$	$aY\left(\frac{t}{a};\ as\right)$
$\frac{(t-\xi)^n}{n!}$	$\frac{1}{S^{n+1}}$	$y(t-\xi\pm a)$	$e^{\pm as} Y(t\pm a;\ s)$
$e^{\pm a(t-\xi)}$	$\frac{1}{s\mp a}$	$\int_{\xi}^{t} y_1(t-\sigma)\ y_2(\sigma-\xi) d\sigma$	$Y_1(t;\ s) \odot Y_2(t;\ s$
$\operatorname{Sin}\alpha(t-\xi)$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$	$\frac{d^n}{dt^n} y(t-\xi)$	$s^n \odot Y(t; s) - \sum_{i=1}^{n} y^{(i-1)}(0) s^{n-i}$
$a_1(t) y_1(t-\xi) \pm \pm a_2(t) y_2(t-\xi)$	$a_1(t) Y_1(t;\ s) \pm \pm a_2(t) Y_2(t; s)$	$\underbrace{\int\int\ldots\int}_{n} y(t_1-\xi) dt_1 \ldots dt_n$	$\frac{1}{s^n} \odot Y(t;\ s) + \sum_{i=1}^{n} \frac{y^{-i}(0)}{s^{n-i+1}}$

Очевидно, всегда можно подобрать такое $\operatorname{Re} s = \sigma_1 > c_1 > \sigma$, чтобы $a_n(t)(t-\xi)^{n+1} | \leqslant N e^{s(t-\xi)}$ для любого n. В этом случае, как и для (1.9) можно показать, что изображение производной (1.10) существует. Следовательно, $Y(t; s)$ является аналитической функцией.

Теорема 2. *Если функция $Y(t; s)$ аналитическая при любом $s = \sigma + j\omega$, где $\operatorname{Re} s = \sigma > c_0$, стремится к нулю при $|s| \to \infty$ в любой полуплоскости $\operatorname{Re} s > c$ равномерно относительно аргумента s и интеграл $\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(t; s) e^{s(t-\xi)} ds$, существует, то $Y(t; s)$ является изображением функции $y(t-\xi)$:*

$$y(t-\xi) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(t; s)\, e^{s(t-\xi)} ds, \quad (1.11$$

где уравнение (1.11) определяет функцию-оригинал по ее изображению.

Доказательство теоремы достаточно простое, особенно, если иметь ввиду, что

$$Y(t;\ s) = \int_{-\infty}^{t}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{a_n(t)}{n!}(t-\xi)^n\right] e^{-s(t-\xi)} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n(t) \frac{1}{s^n}.$$

§ 2. Определение по Лапласу (1.4) изображений элементарных функций так же просто, как и для обычного преобразования Лапласа, поэтому подробно здесь рассматриваться не будет.

Выше приведена таблица некоторых смещенных функций и их изображений. Многие изображения совершенно совпадают с изображениями элементарных функций при $\xi = 0$ на основе обычного преобразования Лапласа. Поэтому для определения соответствия между изображениями и оригиналами смещенных элементарных функций на основе преобразования (1.4) можно пользоваться таблицами для обычного преобразования Лапласа, но только нужно в соответствующих оригиналах к переменной t добавлять $-\xi$.

Следует, однако, иметь в виду, что такое совпадение наблюдается не для всех функций, для которых существует и определено обычное преобразование Лапласа и преобразование (1.4).

§ 3. Дифференцирование в области вещественной переменной t. Если функция $y(t-\xi)$ и ее производная $\frac{dy(t-\xi)}{dt}$ преобразуемы по формуле (1.4) и если $Y(t; s)$ является изображением $y(t-\xi)$, то

$$L\left[\frac{dy(t-\xi)}{dt}\right] = s \odot Y(t; s) - y(0), \tag{3.1}$$

где L — символ прямого преобразования (1.4); $\odot$ — символ операторного умножения (7.3); $y(0)$ — начальное значение функции $y(t-\xi)$ при $t = \xi$.

Действительно, продифференцируем (1.4) по t:

$$\frac{dY(t; s)}{dt} = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{dy(t-\xi)}{dt} e^{-s(t-\xi)} d\xi -$$

$$- s\int\limits_{-\infty}^{t} y(t-\xi) e^{-s(t-\xi)} d\xi + y(t-\xi) e^{-s(t-\xi)} \big|_{\xi=t}.$$

Из последнего равенства на основании формулы операторного умножения Бурле (7.3)

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \frac{dy(t-\xi)}{dt} e^{-s(t-\xi)} d\xi = sY(t; s) + \frac{dY(t; s)}{dt} - y(0) = s \odot Y(t; s) - y(0). \tag{3.2}$$

Точно так можно показать, что

$$L\left[\frac{d^2 y(t-\xi)}{dt^2}\right] = s^2 \odot Y(t; s) - sy(0) - \dot{y}(0),$$

. . . .

$$L\left[\frac{d^n y(t-\xi)}{dt^n}\right] = s^n \odot Y(t; s) - \sum_{i=1}^{n} y^{(i-1)}(0)\, s^{(n-i)}. \tag{3.3}$$

Интегрирование в области действительной переменной t. Если функция $y(t-\xi)$ преобразуема по формуле (1.4) и $Y(t; s)$ является ее изображением, то интеграл $\int y(t-\xi)\,dt$ также преобразуем и его изображение запишется так:

$$L\left[\int y(t-\xi)\,dt\right] = \frac{1}{s} \odot Y(t; s) + \frac{y^{-1}(0)}{s}. \tag{3.4}$$

Существование преобразования Лапласа для интеграла от какой-нибудь функции $y(t-\xi)$, если существует преобразование Лапласа для этой функции, следует из условий допустимости преобразования Лапласа. $y^{-1}(0)$ — значение интеграла $\int y(t-\xi)\,dt$ при приближении t к ξ с правой стороны, если интеграл имеет скачок при $t=\xi$.

Действительно, продифференцируем изображение интеграла по t:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{t}\left[\int y(t-\xi)\,dt\right]e^{-s(t-\xi)}d\xi=\left|\int y(t-\xi)\,dt\right|e^{-s(t-\xi)}\Big|_{t=\xi}+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{t} y(t-\xi)\,e^{-s(t-\xi)}d\xi-s\int\limits_{-\infty}^{t}\left[\int y(t-\xi)\,dt\right]e^{-s(t-\xi)}d\xi.$$

Из последнего равенства получим изображение интеграла:

$$\int\limits_{-\infty}^{t}\left[\int y(t-\xi)\,dt\right]e^{-s(t-\xi)}d\xi=\frac{1}{s}Y(t;\,s)+\frac{1}{s}y^{-1}(0)-$$

$$-\frac{1}{s}\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{t}\left[\int y(t-\xi)\,dt\right]e^{-s(t-\xi)}d\xi. \tag{3.5}$$

Определим снова в правой части уравнения (3.5) изображение интеграла и, подставив его туда же, получим выражение:

$$\int\limits_{-\infty}^{t}\left[\int y(t-\xi)\,dt\right]e^{-s(t-\xi)}d\xi=\frac{1}{s}Y(t;s)+\frac{1}{s}y^{-}(0)-\frac{1}{s}\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{s}Y(t;s)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{s}y^{-1}(0)-\frac{1}{s}\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{t}\left[\int y(t-\xi)\,dt\right]e^{-s(t-\xi)}d\xi\right\},$$

в правую часть которого снова необходимо подставить изображение интеграла. Итак, повторяя необходимое число раз, получим выражение для изображения интеграла в виде бесконечного ряда:

$$\int\limits_{-\infty}^{t}\left[\int y(t-\xi)\,dt\right]e^{-s(t-\xi)}d\xi=\frac{1}{s}Y(t;s)-\frac{1}{s^2}\frac{dY(t;s)}{dt}+$$

$$+\frac{1}{s^3}\frac{d^2Y(t;s)}{dt^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{s^n}\frac{d^{n-1}Y(t;s)}{dt^{n-1}}+\ldots+\frac{y^{-1}(0)}{s}.$$

Последнее равенство на основании формулы операторного умножения Бурле может быть записано в следующем виде:

$$\int\limits_{-\infty}^{t}\left[\int y(t-\xi)\,dt\right]e^{-s(t-\xi)}d\xi=\frac{1}{s}\cdot Y(t;s)+\frac{y^{-1}(0)}{s}. \tag{3.6}$$

Точно таким путем можно получить изображение кратных интегралов:

$$L\left[\int\int y(t_1-\xi)\,dt_1dt_2\right]=\frac{1}{s^2}\cdot Y(t;s)+\frac{y^{-1}(0)}{s^2}+\frac{y^{-2}(0)}{s},$$

$$L\left[\int\int\int y(t_1-\xi)\,dt_1dt_2dt_3\right]=\frac{1}{s^3}\cdot Y(t;s)+\frac{y^{-1}(0)}{s^3}+\frac{y^{-2}(0)}{s^2}+\frac{y^{-3}(0)}{s},$$

. . . .

$$L\Big[\underbrace{\int\int\ldots\int}_{n} y(t_1-\xi)\,dt_1\ldots dt_n\Big]=\frac{1}{s^n}\cdot Y(t;s)+\sum_{i=1}^{n}\frac{y^{-i}(0)}{s^{n-i+1}}. \qquad (3.7)$$

§ 4. Если функция $y(t-\xi)$ преобразуема по формуле (1.4) и если $Y(t;s)$ является изображением этой функции, то преобразование произведения этой функции на коэффициент $a(t)$, который является функцией действительного аргумента t, равно следующему выражению:

$$L[a(t)\,y(t-\xi)]=a(t)\,Y(t;s). \qquad (4.1)$$

Действительно, в интеграле $\int\limits_{-\infty}^{t} a(t)\,y(t-\xi)\,e^{-s(t-\xi)}\,d\xi$ интегрирование ведется по переменной ξ, а t является параметром, поэтому коэффициент $a(t)$ может быть вынесен за знак интеграла:

$$\int\limits_{-\infty}^{t} a(t)\,y(t-\xi)\,e^{-s(t-\xi)}d\xi=a(t)\int\limits_{-\infty}^{t} y(t-\xi)\,e^{-s(t-\xi)}d\xi=a(t)\,Y(t;s).$$

На основании этого

$$\begin{aligned}L\left[a(t)\frac{dy(t-\xi)}{dt}\right]&=a(t)\,[s\cdot Y(t;s)-y(0)],\\ L\left[a(t)\int y(t-\xi)\,dt\right]&=a(t)\left[\frac{1}{s}\cdot Y(t;s)+\frac{y^{-1}(0)}{s}\right].\end{aligned} \qquad (4.2)$$

§ 5. Определим изображение по Лапласу (1.4) дифференциального уравнения (1.3), если на функцию $y(t)$ наложены ограничения (1.2) и если $f(t)$ может быть представлена в виде $f(t-\xi)$:

$$L\left[a_0(t)\,\frac{d^ny(t-\xi)}{dt^n}+a_1(t)\,\frac{d^{n-1}y(t-\xi)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_n(t)\,y(t-\xi)\right]=L\,[f(t-\xi)]. \qquad (5.1)$$

На основании формул (4.1), (4.2) и в результате элементарных преобразований получим изображение, которое представляет собой алгебраическое уравнение комплексного переменного s, в которое в качестве параметра входит действительное переменное t:

$$[a_0(t)\,s^n+a_1(t)\,s^{n-1}+\ldots+a_n(t)]\cdot Y(t;s)=F(t;s)=K(t;s), \qquad (5.2)$$

где $Y(t;\ s)$ — изображение функции $y(t-\xi)$; $F(t;\ s)$ — изображение функции $f(t-\xi)$; $K(t;s)$ — изображение начальных значений $y(t-\xi)$ и ее производных при $t=\xi$, $(t-\xi)=0$:

$$K(t;s)=\left[a_0(t)\sum_{i=1}^{n} y^{(i-1)}(0)\,s^{n-i}+a_1(t)\sum_{i=1}^{n-1} y^{(i-1)}(0)\,s^{(n-i-1)}+\ldots\right].$$

Изображение по Лапласу интегро-дифференциального уравнения также может быть определено, если на функцию-решение этого уравнения наложить ограничение (1.2). Пусть, например, дано линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$a_0(t)\frac{dy_1(t-\xi)}{dt}+a_1(t)\,y_1(t-\xi)+a_2(t)\int y_1(t-\xi)\,dt=f_1(t-\xi). \quad (5.3)$$

На основании формул (4.1), (4.2) и свойства линейности преобразования получим

$$\left[a_0(t)\,s+a_1(t)+\frac{a_2(t)}{s}\right]\odot Y_1(t;s)=F_1(t;s)+K_1(t;s), \quad (5.4)$$

где $K_1(t;s)=a_0(t)\,y(0)-a_2(t)\dfrac{y^{-1}(0)}{s}$.

Точно таким путем может быть определено изображение линейного интегрального уравнения, например, Вольтерра

$$a_0(t)\,u(t)+\int_0^t K(t;\sigma)\,u(\sigma)\,d\sigma=f(t), \quad (5.5)$$

где $K(t;\sigma)$ — ядро; $u(t)$ — неизвестная функция, которую необходимо определить в результате решения этого уравнения; $f(t)$ — некоторая заданная функция; $a_0(t)$ — переменный, зависящий от t, коэффициент.

Если на функцию $u(t)$ и $f(t)$ могут быть наложены ограничения (1.2), то интегральное уравнение может быть записано в следующем виде:

$$a_0(t)\,u(t-\xi)+\int_\xi^t K(t;\sigma)\,u(\sigma-\xi)\,d\sigma=f(t-\xi). \quad (5.6)$$

Предположим, что ядро $K(t;\sigma)$ может быть разложено в ряд Тейлора в окрестности $t=\sigma$, $(t-\sigma)=0$, по степеням $(t-\sigma)$:

$$K(t;\sigma)=a_1(t)-\frac{a_2(t)}{1!}(t-\sigma)+\frac{a_3(t)}{2!}(t-\sigma)^2+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n+1}\frac{a_{n+1}(t)}{n!}(t-\sigma)^n+\ldots,$$

где $a_{i+1}(t)=\left.\dfrac{\partial^i K(t;\sigma)}{\partial\sigma^i}\right|_{\sigma=t}$. Тогда уравнение (5.6) может быть записано так:

$$a_0(t)\,u(t-\xi)+\int_\xi^t\left[a_1(t)-\frac{a_2(t)}{1!}(t-\sigma)+\right.$$

$$\left.+\frac{a_3(t)}{2!}(t-\sigma)^2+\ldots\right]u(\sigma-\xi)\,d\sigma=f(t-\xi). \quad (5.7)$$

Если учесть, что

$$\int_\xi^t\frac{(t-\sigma)^i}{i!}\,u(\sigma-\xi)\,d\sigma=\underbrace{\int\int\ldots\int}_{i+1}u(\sigma-\xi)\,d\sigma\ldots d\sigma_i,\qquad i=1,2\ldots,$$

то на основании формул (4.1), (4.2) и в результате элементарных преобразований получим изображение по Лапласу (1.4) интегрального уравнения (5.6):

$$\begin{gathered}[a_0(t) + a_1(t)s^{-1} + a_2(t)s^{-2} + a_3(t)s^{-3} + \ldots]\circ U(t; s) = F(t; s), \\ [a_0(t) + K(t; s)]\circ U(t; s) = F(t; s). \end{gathered} \tag{5.8}$$

Таким образом, в отличие от уравнений с постоянными коэффициентами, когда изображения по Лапласу представляют собой алгебраические уравнения комплексного s с постоянными коэффициентами, преобразования по Лапласу (1.4) уравнений с переменными коэффициентами представляют собой новый тип алгебраических уравнений комплексного переменного s, где коэффициенты являются функциями действительного переменного t. Причем изображение интегрального уравнения представляет собой алгебраическое уравнение бесконечной степени, где все s — в отрицательной степени. Эти уравнения существенно отличаются от уравнений, записанных в символической форме, на основе простой замены символа $\dfrac{d^i}{dt^i}$ на p^i, например в работах А. В. Солодова [3] и др.

§ 6. Свойства преобразования Лапласа (1.4) во многом совпадают со свойствами обычного преобразования. Однако имеются и некоторые особенности. Те из них, которые элементарно доказываются, достаточно только назвать, а для тех, которые существенно отличаются от свойств обычного преобразования, приведено доказательство.

1. Линейность преобразования (1.4). Если для функций $y_1(t - \xi)$ и $y_2(t - \xi)$ существует преобразование Лапласа (1.4) и $Y_1(t; s)$ и $Y_2(t; s)$ являются изображениями этих функций, а $a_1(t)$, $a_2(t)$ — некоторые постоянные коэффициенты или функции аргумента t, то

$$L[a_1(t)\, y_1(t - \xi) \pm a_2(t)\, y_2(t - \xi)] = a_1(t)\, Y_1(t; s) \pm a_2(t)\, Y_2(t; s). \tag{6.1}$$

2. Изменение масштаба. Изменением масштаба часто пользуются при замене аргумента для упрощения обратного преобразования некоторых изображений.

Если функция $y(t - \xi)$ преобразуема по Лапласу (1.4) и $Y(t; s)$ является ее изображением, то

$$L\left[y\left(\frac{t - \xi}{a}\right)\right] = aY(t/a; as), \tag{6.2}$$

где a — некоторая положительная постоянная или переменная величина, не зависящая от t, ξ и s.

3. Смещение в области действительного аргумента t. Если функция $y(t - \xi)$ преобразуема по Лапласу (1.4) и $Y(t; s)$ является ее изображением, то смещение в области действительного аргумента t на величину a, где a — вещественное положительное число, запишется так:

$$L(y(t - \xi \pm a)] = e^{\pm as} Y(t + a; s). \tag{6.3}$$

4. Смещение в области комплексного аргумента s. Если функция $y(t - \xi)$ преобразуема по Лапласу (1.4) и $Y(t; s)$ является ее изображением, то

$$L[e^{+a(t-\xi)} y(t - \xi)] = Y(t; s \mp a). \tag{6.4}$$

5. Умножение функций в области оригиналов. Если функции $y_1(t - \xi)$ и $y_2(t - \xi)$ преобразуемы по Лапласу (1.4) и $Y_1(t; s)$ и $Y_2(t; s)$ являются соответственно их изображениями, то изображе-

ние произведения этих функций соответствует комплексному интегралу свертки изображений этих функций:

$$L[y_1(t-\xi)\,y_2(t-\xi)] = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y_1(t; s-p)\,Y_2(t; p)\,dp$$

$$(\sigma_2 < c < \sigma - \sigma_1; \qquad \sigma > \max(\sigma_1; \sigma_2; \sigma_1 + \sigma_2)), \tag{6.5}$$

где $\sigma = \operatorname{Re} s$, σ_1 и σ_2 — абсциссы абсолютной сходимости $y_1(t-\xi)$ и $y_2(t-\xi)$ соответственно.

6. Теорема об умножении изображений. *Если функции $y_1(t-\xi)$ и $y_2(t-\xi)$ преобразуемы по Лапласу* (1.4) *и* $Y_1(t; s)$ *и* $Y_2(t; s)$ *являются соответственно их изображениями, то*

$$Y_1(t; s)\cdot Y_2(t; s) = L\left[\int\limits_{\xi}^{t} y_1(t-\sigma)\,y_2(\sigma-\xi)\,d\sigma\right], \tag{6.6}$$

где $\odot$ *— символ операторного умножения.*

Интегральная связь вещественных смещенных функций (6.6) обычно обозначается $y_1(t-\xi) * y_2(t-\xi)$ и называется сверткой смещенных функций. Можно показать, что такая свертка нескольких функций, обладая свойством ассоциативности и дистрибутивности, не обладает свойством коммутативности, за исключением частного элементарного случая, когда $y_1(t-\xi)$ и $y_2(t-\xi)$ являются элементарными функциями:

$$y_1(t-\xi) * y_2(t-\xi) \neq y_2(t-\xi) * y_1(t-\xi).$$

Поэтому в дальнейшем такую свертку будем именовать некоммутативной сверткой функций, в отличие от обычной коммутативной. На основе такой свертки Э. Берг [4] получил операторные соотношения для решения операторным путем линейных дифференциальных уравнений.

Доказательство. Пусть $y_1(t-\xi)$ и $y_2(t-\xi)$ аналитические смещенные функции, для которых существует преобразование Лапласа (1.4) и $Y_1(t; s)$ и $Y_2(t; s)$ являются их изображениями.

Разложив $y_1(t-\xi)$ в ряд Тейлора по степеням $(t-\xi)$ в окрестности $t=\xi$,

$$y_1(t-\xi) = a_0(t) - a_1(t)\frac{(t-\xi)}{1!} + a_2(t)\frac{(t-\xi)^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{(t-\xi)^n}{n!} + \ldots \tag{6.7}$$

где $a_i(t) = \left.\dfrac{\partial^i y_1(t-\xi)}{\partial \xi^i}\right|_{\xi=t}$, подставим ее значение в (6.6):

$$\int\limits_{\xi}^{t}\left[a_0(t) - a_1(t)\frac{(t-\sigma)}{1!} + a_2(t)\frac{(t-\sigma)^2}{2!} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^n a_n(t)\frac{(t-\sigma)^n}{n!}\right] y_2(\sigma-\xi)\,d\sigma. \tag{6.8}$$

Если учесть что

$$\int\limits_{\xi}^{t}\frac{(t-\sigma)^i}{i!}\,y_2(\sigma-\xi)\,d\sigma = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{i+1} y_2(\sigma-\xi)\,d\sigma\ldots d\sigma_i, \tag{6.9}$$

то на основании формул (4.1), (4.2) и в результате элементарных преобразований получим изображение по Лапласу выражения (6.8)

$$[a_0(t)s^{-1} + a_1(t)s^{-2} + a_2(t)s^{-3} + \ldots] \circ Y_2(t;s) = Y_1(t;s) \circ Y_2(t;s) \qquad (6.10)$$

вследствие того, что

$$[a_0(t)s^{-1} + a_1(t)s^{-2} + a_2(t)s^{-3} + \ldots] =$$

$$= L\left[a_0(t) - a_1(t)\frac{(t-\xi)}{1!} + a_2(t)\frac{(t-\xi)^2}{2!} + \ldots\right] = L[y_1(t-\xi)] = Y_1(t;s). \qquad (6.11)$$

Теорема доказана.

§ 7. В результате преобразования по Лапласу линейных дифференциальных, интегро-дифференциальных и интегральных уравнений получаются аналитические функции комплексного аргумента s нового типа с действительным переменным t в качестве параметра. Обозначим в уравнениях (5.2) и (5.4) через $A(t;s)$ и $B(t;s)$ соответственно следующие выражения:

$$[a_0(t)s^n + a_1(t)s^{n-1} + \ldots + a_n(t)] = A(t;s),$$

$$\left[a_0(t)s + a_1(t) + \frac{a_2(t)}{s}\right] = B(t;s). \qquad (7.1)$$

Тогда эти уравнения при нулевых начальных условиях могут быть записаны так:

$$A(t;s) \circ Y(t;s) = F(t;s),$$

$$B(t;s) \circ Y_1(t;s) = F_1(t;s). \qquad (7.2)$$

Функции $A(t;s)$ и $B(t;s)$ комплексного аргумента s определены в некотором пространстве D и D_1 и каждому значению $Y(t;s)$ и $Y_1(t;s)$, принадлежащим этим пространствам, ставят в соответствие $F(t;s)$ и $F_1(t;s)$, определенные там же.

Поэтому такие функции можно рассматривать как некоторые операторы, в общем случае зависящие от параметра t. Такие операторы принято называть параметрическими или переменными, так как коэффициенты являются чаще всего функциями времени, т. е. переменными во времени. В отличие от них операторы $A(s)$ и $B(s)$, не зависящие от t, принято называть постоянными.

Для параметрических операторов $A(t;s)$ и $B(t;s)$ введена операция, которая называется операторным умножением и обозначается символом $\circ$. Под операторным произведением двух операторов $A_1(t;s)$ и $A_2(t;s)$ понимается следующее действие над ними:

$$A_1(t;s) \circ A_2(t;s) = A_1(t;s)A_2(t;s) +$$

$$+ \frac{1}{1!}\frac{\partial A_1(t;s)}{\partial s}\cdot\frac{\partial A_2(t;s)}{\partial t} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 A_1(t;s)}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial^2 A_2(t;s)}{\partial t^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n A_1(t;s)}{\partial s^n}\cdot\frac{\partial^n A_2(t;s)}{\partial t^n} + \ldots \qquad (7.3)$$

Выражение (7.3) получается на основании известной формулы Лейбница и иногда называется формулой Бурле [5].

Операторное произведение нескольких операторов дистрибутивно, ассоциативно, но в общем случае — некоммутативно.

Операторное произведение по формуле (7.3) определено не только для операторов, но и для комплексных параметрических функций, не являющихся операторами. Это следует из интеграла свертки и его изображения (6.6).

Для операторов существует понятие обратного оператора. Обратным оператором некоторого $A(t; s)$ называется оператор $A^{-1}(t; s)$, произведение которого с $A(t; s)$ равно единице. Если

$$A^{-1}(t; s) \odot A(t; s) = 1. \tag{7.4}$$

то такой оператор $A^{-1}(t; s)$ называется левым, в противоположность правому, который определяется из соотношения

$$A(t; s) \odot A^{-1}(t; s) = 1.$$

Можно заметить, что для постоянного оператора $A(s)$

$$A^{-1}(s) = \frac{1}{A(s)}.$$

Свойства рассматриваемых операторов изложены, например, в [6], и поэтому нет смысла излагать их здесь.

§ 8. Изображение решения дифференциального уравнения (1.3) может быть определено из (5.2), если умножить слева на обратный оператор $A^{-1}(t; s)$ это выражение:

$$A^{-1}(t; s) \odot A(t; s) \odot Y(t; s) = A^{-1}(t; s) \odot F(t; s) + A^{-1}(t; s) \odot K(t; s), \tag{8.1}$$

где $A(t; s) = a_0(t) s^n + a_1(t) s^{n-1} + \ldots + a_n(t)$.

Вследствие того, что $A^{-1}(t; s) \cdot A(t; s) = 1$, по определению, $Y(t; s) = A^{-1}(t; s) \odot [F(t; s) + K(t; s)]$. Если существует и может быть определен обратный оператор $A^{-1}(t; s)$ и известны изображения $F(t; s)$ и $K(t; s)$, то оригинал решения $y(t-\xi)$ может быть определен с помощью формулы обратного преобразования (1.6):

$$y(t-\xi) = L^{-1}\{A^{-1}(t; s) \odot [F(t; s) + K(t; s)]\}, \tag{8.2}$$

где L^{-1} —символ обратного преобразования Лапласа.

Если известны оригиналы для $A^{-1}(t; s)$, $F(t; s)$ и $K(t; s)$ соответственно $g(t-\xi)$, $f(t-\xi)$ и $k(t-\xi)$, то на основании теоремы об операторном умножении изображений

$$y(t-\xi) = \int_\xi^t g(t-\sigma) f(\sigma-\xi)\, d\sigma + \int_\xi^t g(t-\sigma) k(\sigma-\xi)\, d\sigma. \tag{8.3}$$

Точно так могут быть определены изображения решения интегро-дифференциального (5.3) и интегрального (5.6) уравнений:

$$Y_1(t; s) = B^{-1}(t; s) \odot [F_1(t; s) + K_1(t; s)], \tag{8.4}$$

$$U(t; s) = C^{-1}(t; s) \odot F(t; s),$$

где $B^{-1}(t; s)$ и $C^{-1}(t; s)$ являются левыми обратными операторами для $B(t; s)$ и $C(t; s)$.

Таким образом, решение линейных уравнений связано с определением обратных операторов $A^{-1}(t; s)$, $B^{-1}(t; s)$, $C^{-1}(t; s)$ по заданным параметрическим операторам.

Обратный оператор $A^{-1}(t;\ s)$ определяется из (7.4), которое, если учесть формулу операторного произведения (7.3), можно записать в виде дифференциального уравнения:

$$\ldots \frac{1}{n!}\frac{\partial^n A^{-1}(t;s)}{\partial s^n}\cdot\frac{\partial^n A(t;s)}{\partial t^n}+\ldots+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 A^{-1}(t;s)}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial^2 A(t;s)}{\partial t^2}+$$

$$+\frac{1}{1!}\frac{\partial A^{-1}(t;s)}{\partial s}\cdot\frac{\partial A(t;s)}{\partial t}+A^{-1}(t;s)\,A(t;s)=1 \qquad (8.5)$$

или

$$\ldots e_0(t;s)\frac{d^n A^{-1}(t;s)}{ds^n}+\ldots+e_{n-2}(t;s)\frac{d^2A^{-1}(t;s)}{ds^2}+e_{n-1}(t;s)\times$$

$$\times\frac{dA^{-1}(t;s)}{ds}+e_n(t;s)\,A^{-1}(t;s)=1, \qquad (8.6)$$

где $e_{n-k}(t;s)=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k A(t;s)}{\partial t^k}$, $k=1,2,3\ldots$; $A^{-1}(t;s)$ является частным решением этого уравнения при нулевых начальных условиях.

Условия существования и единственности обратного оператора сводятся таким образом к условиям существования и единственности решения уравнения (8.6). Естественно, решение этого уравнения не представляет собой элементарную функцию и не может быть определено с помощью квадратур. Поэтому чаще всего $A^{-1}(t;\ s)$ определяется в виде бесконечного функционального ряда [4, 5].

Если обратный оператор представить в виде ряда

$$A^{-1}(t;s)=c_0(t)\,s^m+c_1(t)\,s^{m-1}+c_2(t)\,s^{m-2}+\ldots+c_k(t)\,s^{m-k}+\ldots, \qquad (8.7)$$

коэффициенты которого являются функциями t, то для того чтобы произведение прямого и обратного операторов (7.4) равнялось единице, необходимо, чтобы в этом произведении был хотя бы один член с s в нулевой степени. Для этого необходимо, чтобы $m=-n$, где n — степень прямого оператора. Точно так может быть определен обратный оператор $B^{-1}(t;\ s)$ и $C^{-1}(t;\ s)$ для интегро-дифференциального и интегрального уравнения.

Коэффициенты ряда (8.7) не известны и подлежат определению. Для этого продифференцируем k раз $A(t;\ s)$ из выражения (5.2) по t и $A^{-1}(t;\ s)$ по s:

$$\frac{\partial^k A(t;s)}{\partial t^k}=a_0^{(k)}(t)\,s^n+a_1^{(k)}(t)\,s^{n-1}+\ldots+a_n^{(k)}(t);\quad a_i^{(k)}(t)=\frac{\partial^k a_i(t)}{\partial t^k};$$

$$\frac{\partial A^{-1}(t;s)}{\partial s}=-nc_0(t)\,s^{-n-1}-(n+1)\,c_1(t)\,s^{-n-2}-(n+2)\,c_2(t)\,s^{-n-3}-\ldots, \qquad (8.8)$$

$$\frac{\partial^2 A^{-1}(t;s)}{\partial s^2}=n(n+1)\,c_0(t)\,s^{-n-2}+(n+1)(n+2)\,c_1(t)\,s^{-n-3}+$$

$$+(n+2)(n+3)\,c_2(t)\,s^{-n-4}+\ldots, \qquad (8.9)$$

. . . .

Подставим значения $A(t;\ s)$ из (7.1), а также (8.7) — (8.9) в (8.6), произведем обычное умножение и, сгруппировав члены при одинаковой степени s, отметим, что при $s^i(i=0,\ 1,\ 2\ldots)$ соответственно стоят следующие выражения из коэффициентов $a_i(t)$, $c_i(t)$ и их производных:

$$a_0(t)c_0(t)+[a_0(t)c_1(t)+a_1(t)c_0(t)-n\dot{a}_0(t)c_0(t)]s^{-1}+\Big\{[a_0(t)c_2(t)+a_1(t)c_1(t)+$$

$$+a_2(t)c_0(t)]-\frac{1}{1!}[n\dot{a}_1(t)c_0(t)+(n+1)c_1(t)\dot{a}_0(t)]+$$

$$+\frac{n(n+1)}{2!}c_0(t)\ddot{a}_0(t)\Big\}s^{-2}+\ldots$$

Очевидно, что $A^{-1}(t;\ s)\cdot A(t;\ s)$ только тогда будет равно единице, если выражение при нулевой степени s равно единице, а при других степенях s равны нулю, т. е.

$$a_0(t)c_0(t)=1,$$

$$a_0(t)c_1(t)+a_1(t)c_0(t)-n\dot{a}_0(t)c_0(t)=0,$$

$$[a_0(t)c_2(t)+a_1(t)c_1(t)+a_2(t)c_0(t)]-\frac{1}{1!}[nc_0(t)\dot{a}_1(t)+(n+1)c_1(t)\dot{a}_0(t)]+$$

$$+\frac{n(n+1)}{2!}\ddot{a}_0(t)c_0(t)=0, \qquad (8.10)$$

. . . .

Из соотношений (8.10), зная коэффициенты $a_i(t)$ оператора $A(t;\ s)$, можно последовательно определить коэффициенты $c_i(t)$ ряда (8.7).

Точно так могут быть определены обратные операторы $B^{-1}(t;\ s)$ и $C^{-1}(t;\ s)$ для интегро-дифференциальных и интегральных уравнений.

Автор благодарит А. И. Кухтенко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Шаталов, Инженерные методы линейной теории систем управления с переменными параметрами, сб. Автоматическое управление и вычислительная техника, вып. 3, Машгиз, М., 1960.
2. L. Zadeh, Frequency analysis of variable networks, PIRE, vol. 38, March 1950.
3. А. В. Солодов, Линейные системы с переменными параметрами, Физматгиз, М., 1962.
4. E. Berz, Lösung der linearen Differentialgleichung durch Transformation in einen Schiefkörper, Math. Zeitschrift, 76, 2, 1961.
5. H. Davis, The theory of linear operators..., Principia press, 1936.
6. Д. Лэнинг и Р. Беттин, Случайные процессы в задачах автоматического управления, ИЛ, М., 1958.

Поступила 15.II 1967 г.,
после переработки — 8.IV 1969 г.

Киевский институт инженеров гражданской авиации