1969 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 21, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.512.6+517.392

Общие формы линейных функционалов и остаточные члены формул приближенного анализа

И. А. Эзрохи

Пусть $V(f)$ — остаточный член формулы приближения, линейной [1] на некотором пространстве Банаха E и точной на некотором конечномерном подпространстве Ω. Тогда $V(f)$ линеен на E и аннулируется на Ω.

Удобному представлению $V(f)$ как на E, так и на его подпространствах, в том случае когда Ω — множество многочленов не выше определенной степени посвящен ряд работ [1 - 27].

В настоящей работе, обобщающей результаты Е. Я. Ремеза [2, 3] и автора [4 5], приводятся результаты о представлении $V(f)$ в том случае, когда он линеен на пространстве функций, имеющих производные порядка s_i по x_i ($i = 1, \ldots, n$) непрерывные ($C_{s_1,\ldots,s_n}$) или суммируемые с p-й степенью ($p \geq 1$) ($L^p_{s_1,\ldots,s_n}$) (по поводу всех обозначений и определений см. [4]), а Ω — определенная совокупность обобщенных многочленов.

Доказывается, что остаточные члены такого типа являются суммой n линейных функционалов, каждый из которых аннулируется на функциях, являющихся обобщенными многочленами лишь по одной переменной, и выражается интегралом только от несмешанных производных, с некоторыми весовыми функциями, не зависящими от f, алгоритмы получения которых устанавливаются. Исследуются соотношения между числом перемен знака весовых функций разных порядков. Для функционалов линейных на $C_{0,\ldots,0}$ указывается эффективный метод разбиения $V(f)$ на $V_i(f)$.

В приложении устанавливаются представления остаточных членов отрезков ряда Фурье, тригонометрических интерполяций, одной кубатурной формулы на круге.

§ 1. Обобщенные многочлены. Дифференциальные операторы. Функции Коши. Линейные функционалы

Пусть имеется n систем линейно независимых функций

$$\{u_{i,k_i}(x_i)\} \subset C_{2s_i-1}; \quad k_i = 0, 1, \ldots, \quad s_i - 1; \quad i = 1, \ldots, n.$$

Обобщенными многочленами относительно x_i ранга не выше $s_i - 1$ будем называть функции вида

$$\omega_{\mu_i}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{\mu_i - 1} c_k^i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, u_{i,k}(x_i),$$

где функции $c_k(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ непрерывны ($\mu_i \leq s_i$).

Каждому μ_i $(0 \leqslant \mu_i \leqslant s_i;\ i = 1, \ldots, n)$, для которого вронскиан $W_{\mu_i} = W(u_{i,0}, u_{i,1}, \ldots, u_{i,\mu_i-1})$ отличен от нуля на промежутке $[a_i, b_i]$ (впредь будем записывать так: $W_{\mu_i} \neq 0$), отвечает дифференциальный оператор

$$D_{\mu_i}(f) = D_{\mu_i, x_i}(f, x_i) = \frac{W(u_{i,0}, \ldots, u_{i,\mu_i-1}, f)}{W(u_{i,0}, \ldots, u_{i,\mu_i-1})}$$

с коэффициентами непрерывными на $[a_i, b_i]$. Кроме того, для любой функции $l(x_1, \ldots, x_n) \in C_0(L^p_{0_i})$ соотношение

$$D_{\mu_i}(f) = l(x_1, \ldots, x_n); \quad a_i \leqslant x_i \leqslant b_i; \quad i = 1, \ldots, n; \ \mu_i > 0$$

(почти везде для $l \in L^p_{0_i}$) эквивалентно соотношению

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \int_{x_i^0}^{x_i} D_{\mu_i}(f, z)\, H_{\mu_i}(x_i, z)\, dz + \omega_{\mu_i}(x_1, \ldots, x_n), \tag{*}$$

где $H_{\mu_i}(x_i, z)$ — функция Коши (см. [2 и 6, стр. 113]) дифференциального уравнения $D_{\mu_i}(f, x_i) = 0$.

Теорема 1. *Для каждого $i = 1, \ldots, n$ операция $l = D_{\mu_i}(f)$ линейна, если $W_{\mu_i} \neq 0$, и отображает C_{μ_i} и $L^p_{\mu_i}$ на C_0, соответственно $L^p_{0_i}$. В обоих пространствах нулями операции является одно и то же множество обобщенных многочленов относительно x_i ранга не выше $\mu_i - 1$.*

Теорема 2. *Если $W_{s_i} \neq 0$, то в пространствах C_{s_i} и $L^p_{s_i}$ могут быть введены следующие нормы, эквивалентные указанным ранее* [4]:

1) $$\|f\|_{C_{s_i}} = \max\{\max_{x_1, \ldots, x_n} |f|,\ \max_{x_1, \ldots, x_n} |D_{s_i}(f)|\};$$

2) $$\|f\|_{L^p_{s_i}} = \max\left\{\max_{x_1, \ldots, x_n} |f|,\ \max_{x_1, \ldots, x_n}\left[\int_{a_i}^{b_i} |D_{s_i}(f)|^p\, dx_i\right]^{\frac{1}{p}}\right\}, \quad p \geqslant 1.$$

Если же $W_{s_i} \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, то в пространствах $C_{s_1, \ldots, s_n}$, $L^p_{s_1, \ldots, s_n}$ могут быть введены нормы эквивалентные указанным ранее [4]:

3) $$\|f\|_{C_{s_1, \ldots, s_n}} = \max\left\{\max_{x_1, \ldots, x_n} |f|,\ \sum_{i=1}^{n} \max_{x_1, \ldots, x_n} |D_{s_i}(f)|\right\};$$

4) $$\|f\|_{L^p_{s_1, \ldots, s_n}} = \max\left\{\max_{x_1, \ldots, x_n} |f|,\ \sum_{i=1}^{n} \max_{x_1, \ldots, x_n}\left[\int_{a_i}^{b_i} |D_{s_i}(f)|^p\, dx_i\right]^{\frac{1}{p}}\right\}.$$

Это вытекает из соотношения (*), [6, стр. 161; 7 и 1, стр. 34].

Теорема 3. *Пусть $W_{s_i} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда операции $l_i = D_{s_i}(f)$ $(i = 1, \ldots, n)$*

1) *линейны и отображают пространства $C_{s_1, \ldots, s_n}$ и $L^p_{s_1, \ldots, s_n}$ в $(C_{0_i})^n_i$, соответственно $(L^p_{0_i})^n_i$* [1, стр. 154 — 155];

2) *в обоих пространствах общими нулями операций является одно и то же множество обобщенных многочленов ранга не выше $s_i - 1$ относительно x_i, $i = 1, \ldots, n$;*

3) *множество комплексов $H = \{(l_1, \ldots, l_n)\} \subset (C_{0_i})^n_i$ или $(L^p_{0_i})^n_i$, для которых существует решение системы*

$$l_i = D_{s_i}(f) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

в пространстве $C_{s_1,\ldots,s_n}$, *соответственно* $L^p_{s_1,\ldots,s_n}$, *замкнуто.*

По поводу доказательства подобного утверждения смотри [4].

Пусть впредь $V(f)$—функционал, обращающийся в нуль для обобщенных многочленов ранга не выше $s_i - 1$ по x_i ($i = 1, \ldots, n$), а $V_i(f)$—функционал, обращающийся в нуль для функций, являющихся обобщенными многочленами относительно x_i ранга не выше $s_i - 1$.

Теорема 4. *Пусть* $V \in (C_{s_1,\ldots,s_n})^*$ (*т. е.* V *линеен на* $C_{s_1,\ldots,s_n}$), *соответственно* $(L^p_{s_1,\ldots,s_n})^*$. *Тогда, если* $W_{s_i} \neq 0$ ($i = 1, \ldots, n$), *то*

$$V(f) = \sum_{i=1}^{n} V_i(f),$$

где для каждого $i = 1, \ldots, n$ $V_i \in (C_{s_i})^*$, *соответственно* $(L^p_{s_i})^*$.

Доказательство. Так как функционал $V(f)$ обращается в нуль на общих нулях операций $D_{s_i}(f)$, $i = 1, \ldots, n$, то в силу теоремы 3 он имеет вид

$$V(f) = \sum_{i=1}^{n} T_i [D_{s_i}(f)]$$

(см. [8], лемма 1), где $T_i \subset (C_{0_i})^*$, соответственно $(L^p_{0_i})^*$.

Функционалы $V_i(f) = T_i [D_{s_i}(f)]$ обращаются в нуль на $\omega_{s_i}(x_1, \ldots, x_n)$ и являются искомыми. Теорема доказана.

Замечание 1. Если $V \in (C_{s_1,\ldots,s_i-1,\ldots,s_n})^*$, то $V \in (L^p_{s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_n})^*$ и $(C_{s_1,\ldots,s_n})^*$. Пусть впредь для $i = 1, \ldots, n$

$$\Theta_{\bar{x}_i}(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x_i \leqslant \bar{x}_i, \quad a_i < \bar{x}_i, \\ 0, & \text{если} \quad x_i > \bar{x}_i \ \text{или} \ a_i = \bar{x}_i, \end{cases} \tag{**}$$

$$\Theta^m_{\bar{x}_i}(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x_i \leqslant \bar{x}_i, \quad a_i < \bar{x}_i, \\ 0, & \text{если} \quad x_i \geqslant \bar{x}_i + \dfrac{1}{m} \ \text{или} \ \bar{x}_i = a_i, \\ 1 - m(x_i - \bar{x}_i), & \text{если} \ \bar{x}_i < x_i < \bar{x}_i + \dfrac{1}{m}, \end{cases}$$

$$\varrho_{\mu_i,\bar{x}_i}(x_i) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\bar{x}_i}^{x_i} H_{\mu_i}(x_i, z)\, dz, & \text{если} \ x_i \leqslant \bar{x}_i, \\ 0, & \text{если} \ x_i > \bar{x}_i, \quad (\mu_i > 0), \end{cases} \tag{***}$$

$$\varrho_{0,\bar{x}_i}(x_i) = \Theta_{\bar{x}_i}(x_i)$$

и

$$\mathbf{v}_{\mu_i,\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n}(x_1, \ldots, x_n) = \Theta_{\bar{x}_1}(x_1) \ldots \Theta_{\bar{x}_{i-1}}(x_{i-1})\, \varrho_{\mu_i,\bar{x}_i}(x_i)\, \Theta_{\bar{x}_{i+1}}(x_{i+1}), \ldots, \Theta_{\bar{x}_n}(x_n).$$

Аналогично теоремам 1 [4] или 2 [8] устанавливается следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $V \in (C_{\nu_i})^*$ и $W_{\nu_i} \neq 0$. Тогда*

$$V_i(f) = \int\limits_{K_n} D_{s_i}(f)\, d^n g_{\nu_i}(x_1, \ldots, x_n), \tag{1.1}$$

где интеграл понимается в смысле Стильтьеса—Коши, а

$$g_{\nu_i}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \bar{V}_i[\nu_{s_i,\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n}] = \lim_{m\to\infty} V_i\left[\int\limits_{b_i}^{x_i} \Theta^m_{\bar{x}_i}(z)\, H_{s_i}(x_i, z)\, dz \prod_{j\neq i} \Theta^m_{\bar{x}_j}(x_j)\right] \tag{α}$$

и является функцией ограниченной вариации по всем переменным, непрерывной справа внутри K_n и

$$g_{\nu_i}(\bar{x}_1, \ldots, a_j, \ldots, \bar{x}_n) = 0, \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{β}$$

Замечание 2. Функцию $g_{\nu_i}(x_1 \ldots, x_n)$ можно, оставляя в силе условие (β) и не меняя функционала (1.1), изменить лишь на нечислимом множестве значений по каждой переменной внутри K_n. Впредь равенство (α) и служит определением функции $g_{\nu_i}(x_1, \ldots, x_n)$, при этом она будет ограниченной вариации и по каждой переменной ([9], лемма 1). Пусть имеется функционал типа (1.1)

$$V_i(f) = \int\limits_{K_n} D_{\nu_i}(f)\, d^n G_{\nu_i},$$

где G_{ν_i} — функция ограниченной вариации по совокупности переменных. Тогда, если $G_{\nu_i}(x_1, \ldots, x_n)$ обладает свойством (β), то как $V_i[\nu_{s_i,\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n}]$ так и $\bar{V}_i[\nu_{s_i,\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n}]$ совпадают с $G_{\nu_i}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ за исключением не более чем нечислимого множества значений по каждой переменной внутри K_n, а именно тех, при которых функция G_{ν_i} терпит разрыв, ибо для них $V_i[\nu_{s_i,\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n}]$ просто не определена, а $\bar{V}_i[\nu_{s_i,\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n}]$ непрерывна справа. Если же $G_{\nu_i}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ не обладает свойством (β), то этим свойством будет обладать функция

$$G_{s_i}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) - \sum_{j=1}^{n} G_{s_i}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{j-1}, a_j, \bar{x}_{j+1}, \ldots, \bar{x}_n) + \ldots +$$
$$+ (-1)^n G_{s_i}(a_1, \ldots, a_n).$$

Аналогично теоремам 2 [4], 1 и 4 [13] устанавливается следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть $V_i \in (L^{\prime}_{\nu_i})^*$ и $W_{\nu_i} \neq 0$. Тогда*

$$V_i(f) = \int\limits_{K^i_{n-1}} \int\limits_{a_i}^{b_i} D_{\nu_i}(f)\, d^{n-1}_{x_j, j\neq i} \beta_{s_i}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_i, \tag{1.2}$$

где функция

$$\beta_{s_i}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \bar{V}_i[\nu_{s_i,\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n}] \tag{1.3}$$

ограниченной вариации относительно переменных $\bar{x}_j$ *почти для всех* $\bar{\bar{x}}_i$, $j \neq i$, *измерима и суммируема с q-й степенью относительно* $\bar{x}_i$ *при* $p > 1$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$:

$$\sum_{j \neq i} \sum_{k_j=0}^{m_j-1} \left\{ \int_{a_i}^{b_i} \left| \Delta^{n-1}_{\bar{x}_j^{k_j}} \beta_{s_i} \right|^q d\bar{x}_i \right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant \| V_i \|$$

или ограниченной вариации по $\bar{x}_j$, $j \neq i$, *равномерно по* $\bar{x}_i$ *почти для всех* $\bar{x}_i$ *при* $p = 1$:

$$\sum_{j \neq i} \sum_{k_j=0}^{m_j-1} \sup_{\bar{x}_i}{}^* \left| \Delta^{n-1}_{\bar{x}_j^{k_j}} \beta_{s_i} \right| \leqslant \| V_i \|,$$

при этом

$$\beta_{s_i}(x_1, \ldots, a_j, \ldots, x_n) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n;\ j \neq i),$$

а

$$\bar{\bar{V}}_i (\nu_{s_i, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n}) = \lim_{n \to \infty} V_i \left[\varrho_{s_i, \bar{x}_i}(x_i) \prod_{j \neq i} \Theta^n_{\bar{x}_j}(x_j) \right]$$

и непрерывна справа внутри K_n.

Здесь мы имеем интеграл Стильтьеса — Римана от интеграла Лебега [10]:

$$\lim \sum_{j \neq i} \sum_{k_j=0}^{m_j-1} \int_{a_i}^{b_i} D_{s_i}(f, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{i-1}, x_i, \tilde{x}_{i+1}, \ldots, \tilde{x}_n) \Delta^{n-1}_{x_{j \neq i}} \beta_{s_i}(x_{1,k_1}, \ldots$$

$$\ldots, x_{i-1,k_{i-1}}, x_i, x_{i+1,k_{i+1}}, \ldots, x_{n,k_n})\, dx_i,$$

где $K^i_{n-1} = E_{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n}(a_j \leqslant x_j \leqslant b_j;\ j \neq i)$, и символ $\sum\limits_{j \neq i} \sum\limits_{k_j=0}^{m_j-1}$, как и символ $\prod\limits_{j \neq i} \sum\limits_{k_j=0}^{m_j-1}$ означает суммирование по всем указанным индексам.

Замечание 3. Очевидно, что значения функции β_{s_i} можно изменить на множестве меры нуль по x_i, не меняя при этом функционала (см. также замечание 1). Впредь равенство (1.3) служит определением для β_{s_i}.

Следствие 1. *Если* $V_i \in (L^p_{s_i})^*$ *и* $W_{s_i} \neq 0$, *то для* $f \in C_{s_i}$ $V_i(f)$ *имеет вид* (1.1), *при этом* (*см. также* [8, 9, 11])

$$g_{s_i}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{a_i}^{x_i} \beta_{s_i}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_i; \qquad \bar{V}_i(\nu_{s_i, x_1, \ldots, x_n}) = \bar{\bar{V}}_{s_i}[\nu_{s_i, x_1, \ldots, x_n}].$$

Лемма 1. *Пусть*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(x)\, dh(x),$$

где $h(x)$ *непрерывна на промежутке* (a, b) *и возрастает за исключением* k *внутренних точек на промежутке* (a, b), *в которых имеются разрывы пер-*

вого рода, а интеграл понимается в смысле Лебега — Стильтьеса. Тогда, если $s-1$ — наименьшее число перемен знака у всех функций $f(x)$, эквивалентных между собой по мере, порождаемой функцией $h(x)$, то на промежутке (a, b):

1) *$F(x)$ меняет знак не более $s+2k$ раз, если $F(a+0) \neq 0$ и $F(b-0) \neq 0$;*

2) *$F(x)$ меняет знак не более $s-1+2k$ раз, если $F(a+0)=0$ или $F(b-0)=0$;*

3) *$F(x)$ меняет знак не более $s-2+2k$ раз, если $F(a+0)=F(b-0)=0$.*

Доказательство этого утверждения, когда функция $h(x)$ возрастает, проводится так же, как и в случае $h(x)=x$, рассмотренном Е. Я. Ремезом [3, стр. 52], потому что (см. [11, стр. 230—246])

$$\int_a^x f(x)\,dh(x) = \int_0^{V(x)} f[x(V)]\,'A(V)\,dV,$$

где функция $'A(V)$ почти всюду не отрицательна, ибо мера, порождаемая возрастающей функцией $h(x)$, такая же.

Применяя теперь этот результат к каждому промежутку (x_i, x_{i+1}) возрастания функции $h(x)$ и учтя, что роль $F(a)$ здесь играет

$$F(a)+\sum_{r\leqslant i} f(x_r)\,\delta h(x_r)$$

и, что каждый скачек (за исключением тех точек x_i, для которых $f(x_i)=0$) может добавить не более двух перемен знака, мы получим утверждение леммы.

Теорема 7. *Пусть:* 1) $V_i \in (C_{s_i-\mu_i})^*$ $(1\leqslant k<\mu_i\leqslant s_i)$, $W_{s_i}\neq 0$, $W_{s_i-k}\neq 0$; 2) $\overline{W}_{l_i} = W(y_{i,0}(x_i), \ldots, y_{i,l_i-1}(x_i)) \neq 0$; $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$; $l_i=1, \ldots, k$; $W_0=1$, где $y_{i,0}(x_i), \ldots, y_{i,k-1}(x_i)$ — *линейно независимые решения уравнения* $Q_{s_i,s_i-k}(y)=0$, *сопряженного с* $Q_{s_i,s_{i-k}}(y)=0$:

$$D_{s_i}(f) = Q_{s_i,s_i-k}[D_{s_i-k}(f)].$$

Тогда для $f\in L^p_{s_i}$ $V_i(f)$, *имея вид* (1.2), *может быть представлено и в виде*

$$V_i(f) = \int\limits_{K^i_{n-1}} \int\limits_{a_i}^{b_i} D_{s_i-k}(f)\, d^{n-1}_{x_{j\neq i}} \beta_{s_i-k}(x_1, \ldots, x_n)\,dx_i \qquad (k<\mu_i),$$

где β_{s_i-k} *и* β_{s_i} *определяются по теореме* 1 *и связаны соотношением*

$$\beta_{s_i}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\overline{W}_1}{(-1)^k}\int_{a_i}^{x_i} dx_i\,\frac{\overline{W}_0\overline{W}_2}{\overline{W}_1^2}\left\{\int_{a_i}^{x_i} dx_i\,\frac{\overline{W}_1\overline{W}_3}{\overline{W}_2^2}\left[\int_{a_i}^{x_i} dx_i \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots\int_{a_i}^{x_i}\frac{\overline{W}_{k-2}\overline{W}_k}{\overline{W}_{k-1}^2}\int_{a_i}^{x_i}\frac{\overline{W}_{k-1}}{\overline{W}_k}\,\beta_{s_i-k}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_i\right]\right\}.$$

При этом функция $\beta_{s_i}(x_1,\ldots,x_n)$ меняет знак по x_i, по крайней мере на k раз меньше, чем функция $\beta_{s_i-k}(x_1,\ldots,x_n)$.

Это вытекает из теорем 5 и 6 [5], [12, стр. 128], так как $\overline{W}_{l_i}$ ($l_i = 1, \ldots, k$) сохраняют знак, и леммы 1.

Замечание 4. Если $W_{-p} \neq 0$ ($p = 0, 1, \ldots, k$), то условие 2) теоремы 7 выполняется (см. [13, стр. 203]).

Замечание 5. Если условие 2) теоремы 7 ослабить:

$$2') \ \overline{W}_{l_i} = W(y_{i,0}(x_i), \ldots, y_{i,l_i-1}(x_i)) \neq 0; \qquad a_i < x_i < b_i; \qquad l_i = 1, \ldots, k,$$

то теорема сохранит силу, если все нижеследующие функции

$$\frac{\beta_{s_i}}{\overline{W}_1}, \ \frac{\overline{W}_1^2}{\overline{W}_0\overline{W}_2}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\beta_{s_i}}{\overline{W}_1}, \ldots, \left\{\frac{\overline{W}_{k-1}^2}{\overline{W}_{k-2}\overline{W}_k}\cdots\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\overline{W}_1^2}{\overline{W}_0\overline{W}_2}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\beta_{s_i}}{\overline{W}_1}\right)\right\}$$

стремятся к нулю при $x_i \to a_i$ и $x_i \to b_i$.

Из изложенного выше вытекает, что вопрос о представлении $V(f)$ в том или ином пространстве будет решен полностью, если будет указан эффективный метод (теорема 4 в этом смысле не эффективна) разбиения $V(f)$ на $V_i(f)$ ($i = 1, \ldots, n$). Это удается сделать в частном, но весьма важном случае. Пусть впредь

$$\omega_{t_i}^*(f) = \omega_{t_i}^*(f, x_i) = \sum_{m_i=1}^{r_i} \overline{\omega}_{t_i}^{(m_i)}(x_i)\int_{a_i}^{b_i} f dT_{t_i}^{(m_i)}(x_i), \quad \omega_{t_0}^* = 1$$

— некоторая линейная операция, отображающая C в C, являющаяся обобщенным многочленом по x_i ранга не выше $t_i - 1$, $t_i \leqslant s_i$ ($i = 1, \ldots, n$), и такая, что для $f = \omega_{\gamma_i}$

$$V[\omega_{t_{i-1}}^* \ldots \omega_{t_1}^*(f)] = V[\omega_{t_i}^*\omega_{t_{i-1}}^* \ldots \omega_{t_1}^*(f)]; \qquad \gamma_i \leqslant \mu_i \leqslant s_i$$

(такие операции существуют в силу линейной независимости функций каждой системы $\{u_{i,k_i}(x_i)\}$ ($i = 1, \ldots, n$)) [2, стр. 162—164].

Теорема 8. *Пусть* $V \in (C_{0_1,\ldots,0_n})^*$ *и* $W_{\mu_i} \neq 0$ ($0 \leqslant \mu_i \leqslant s_i$), $i = 1, \ldots, n$. *Тогда для* $f \in L_{\mu_1,\ldots,\mu_n}$

$$V(f) = -\sum_{i=1}^{n}\int_{K_{n-1}^i}\int_{a_i}^{b_i} D_{\mu_i,x_i}[f(x_1, \ldots, x_n), x_i]\, d_{x_{j\neq i}}^{n-1}\beta_{\mu_i}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_i,$$

где для $i = 1, \ldots, n$ *везде при* $\mu_i > 1$ *и за возможными исчислимыми исключениями по* x_i *при* $\mu_i = 1$

$$\beta_{\mu_i}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{m\to\infty} V\left\{\prod_{j=1}^{i-1}\omega_{t_j}^*\left[\prod_{l=1}^{n}\Theta_{x_l}^{m} H_{\mu_i}(x_i, \overline{x}_i) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \omega_{t_i}^*\left(\prod_{l=1}^{n}\Theta_{x}^{m} H_{\mu_i}(x_i, \overline{x}_i)\right)\right]\right\}.$$

Кроме того, отметим, что если $\mu_i > 1$, *то при определении* $\beta_{\mu_i}(x_1, \ldots, x_n)$ *функцию* $\Theta_{x_i}^{m}$ *можно заменить на* $\Theta_{\overline{x}_i}$, *так как функция* $H_{\mu_i}(x_i, \overline{x}_i)$ *в этом случае непрерывна по* x_i. *Кроме того, очевидно, можно опустить слова «за возможными исчислимыми исключениями»* (*см. замечания* 2 *и* 3).

Действительно, для каждого $i = 1, \ldots, n$, полагая

$$V_i(f) = V[\omega^*_{t_{i-1}} \ldots \omega^*_{t_1}(f) - \omega^*_{t_i}\omega^*_{t_{i-1}} \ldots \omega^*_{t_1}(f)]$$

и учитывая, что $V[\omega^*_{t_n} \ldots \omega^*_{t_1}(f)] = 0$, легко получаем, что

$$V(f) = \sum_{i=1}^{n} V_i(f),$$

а так как для каждого $i = 1, \ldots, n$ $V_i(f) = 0$ для функций f, являющихся обобщенными многочленами относительно x_i ранга не выше $\mu_i - 1$ ($\mu_i \leqslant s_i$), то для доказательства этой теоремы остается применить теперь к каждому $V_i(f)$ теорему 5 [5].

§ 2. Остаточные члены некоторых конкретных формул приближения

1. О некоторых системах линейно независимых функций (см. также [12, стр. 63—64; 14, стр. 42]).

Утверждение 1. Если для некоторого i ($i = 1, \ldots, n$)

$$u_{i,k_i}(x_i) = x_i^{k_i}, \qquad k_i = 0, 1, \ldots, s_i - 1,$$

то, во-первых, $W_{\mu_i} \neq 0$ ($\mu_i = 1, \ldots, s_i$) на $[a_i, b_i]$, что влечет выполнение условий теоремы 7, и, во-вторых, для каждого $\mu_i = 1, \ldots, s_i$

$$D_{\mu_i}[f, \bar{x}_i] = \frac{\partial^{\mu_i} f(\bar{x}_i)}{\partial \bar{x}_i^{\mu_i}}; \qquad H_{\mu_i}(x_i, \bar{x}_i) = \frac{(x_i - \bar{x}_i)^{\mu_i - 1}}{(\mu_i - 1)!}.$$

Утверждение 2. Если для некоторого i ($i = 1, \ldots, n$)

$$u_{i,k_i}(x_i) = e^{\lambda_{k_i} x_i}; \qquad k_i = 0, 1, \ldots, s_i - 1; \qquad \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{s_i - 1},$$

то для каждого $\mu_i = 1, \ldots, s_i$ $W_{\mu_i} \neq 0$ и

$$D_{\mu_i}(f) = \left[\prod_{k_i=0}^{\mu_i - 1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \lambda_{k_i}\right)\right] f;$$

$$H_{\mu_i}(x_i, \bar{x}_i) = \sum_{r=0}^{\mu_i - 1} e^{\lambda_r (x_i - \bar{x}_i)} \cdot \frac{1}{\prod_{q \neq r}(\lambda_r - \lambda_q)}.$$

Если, в частности, $\lambda_{k_i} = k_i \lambda$ ($k_i = 0, 1, \ldots, s_i - 1$), то

$$H_{\mu_i}(x_i, \bar{x}_i) = \frac{1}{(\mu_i - 1)!\, \lambda^{\mu_i - 1}} (e^{\lambda(x_i - \bar{x}_i)} - 1)^{\mu_i - 1}.$$

Утверждение 3. Если для некоторого i ($i = 1, \ldots, n$) $s_i = 2n + 1$ и система линейно независимых функций $\{u_{i,k_i}(x_i)\}$ ($k_i = 0, \ldots, s_i - 1$) такова:

$$(1, \operatorname{ch} \lambda x_i, \operatorname{sh} \lambda x_i, \operatorname{ch} 2\lambda x_i, \operatorname{sh} 2\lambda x_i, \ldots, \operatorname{ch} n\lambda x_i, \operatorname{sh} n\lambda x_i),$$

то для каждого $\mu_i = 2k+1$ $(k \leqslant n)$ $W_{\mu_i} \neq 0$ и

$$D_{\mu_i}(f) = D_{2k+1}(f) = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \prod_{p=1}^{k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - p^2\lambda^2\right)\right] f;$$

$$H_{\mu_i}(x_i, \bar{x}_i) = H_{2k+1}(x_i, \bar{x}_i) = \frac{2^{2k}}{(2k)!\,\lambda^{2k}} \operatorname{sh}^{2k} \frac{\lambda(x_i - \bar{x}_i)}{2}.$$

Для возможности применения здесь теоремы 7 проще отправляться от равносильной системы

$$(1, e^{-\lambda x_i}, e^{\lambda x_i}, \ldots, e^{-n\lambda x_i}, e^{n\lambda x_i}),$$

для которой уже $W_{\mu_i} \neq 0$ при $\mu_i = 1, \ldots, s_i$ $(s_i = 2n+1)$.

Утверждение 4. Если для некоторого i $b_i - a_i = \frac{2\pi}{\lambda}$ и система линейно независимых функций такова:

$$(1, \cos\lambda x_i, \sin\lambda x_i, \ldots, \cos n\lambda x_i, \sin n\lambda x_i),$$

то для каждого $\mu_i = 2k+1$ $(k = 0, 1, \ldots, n;\ s_i = 2n+1)$ $W_{\mu_i} \neq 0$,

$$D_{\mu_i}(f) = D_{2k+1, x_i}(f) = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + p^2\lambda^2\right)\right] f;$$

$$H_{\mu_i}(x_i, \bar{x}_i) = H_{2k+1}(x_i, \bar{x}_i) = \frac{2^{2k}}{(2k)!\,\lambda^{2k}} \sin^{2k} \frac{\lambda(x_i - \bar{x}_i)}{2}.$$

Для возможности применения замечания 5 нужно систему

$$(1, \cos\lambda x_i, \sin\lambda x_i, \cos 2\lambda x_i, \sin 2\lambda x_i, \ldots, \cos n\lambda x_i, \sin n\lambda x_i)$$

заменить на систему, составленную из линейных комбинаций функций этой системы:

$$\left(\cos^{2n}\lambda\frac{x_i - \alpha}{2},\ \operatorname{tg}\lambda\frac{x_i - \alpha}{2}\cos^{2n}\lambda\frac{x_i - \alpha}{2}, \ldots, \operatorname{tg}^{2n}\lambda\frac{x_i - \alpha}{2}\cos^{2n}\lambda\frac{x_i - \alpha}{2}\right).$$

Все вронскианы новой системы будут отличны от нуля на открытом промежутке $\left(\alpha - \frac{\pi}{\lambda}, \alpha + \frac{\pi}{\lambda}\right)$, т. е. $W_{\gamma_i} \neq 0$ $(\gamma_i = 1, \ldots, s_i)$, $\alpha - \frac{\pi}{\lambda} < x_i < \alpha + \frac{\pi}{\lambda}$, при этом

$$W_{\gamma_i} = 1!\,2!\ldots(\gamma_i - 1)!\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{\gamma_i(\gamma_i-1)}{2}} \left(\cos\lambda\frac{x_i - \alpha}{2}\right)^{\gamma_i(s_i-\gamma_i)}.$$

В этом можно убедиться, сделав замену переменной

$$x_i = \alpha + \frac{2}{\lambda}\operatorname{arctg} t,$$

и учесть [12, стр. 128, п. 56, 57 и 15, стр. 14].

Утверждение 5. Пусть операция $U_{n,m,\lambda}[f,\gamma]$ аннулируется для функций

$$(1, \cos\lambda x, \sin\lambda x, \dots, \cos n\lambda x, \sin n\lambda x, x, x^2, \dots, x^{m-1})$$

и определена для $f(x)$; $a \leqslant x \leqslant b$; $b - a \leqslant \frac{2\pi}{\lambda}$. Тогда для $f \in L^p_{2\mu+\nu}$ ($p \geqslant 1$, $0 \leqslant \mu \leqslant n$, $0 \leqslant \nu \leqslant m$) в силу утверждений 1 и 4 ($\mu + \nu \geqslant 1$)

$$U_{n,m,\lambda}[f,\gamma] = (-1)^{\nu}\int_a^b \left[\prod_{l=1}^{\mu}\left(\frac{d^2}{d\bar{x}^2} + \lambda^2 l^2\right)\frac{d^{\nu} f(\bar{x})}{d\bar{x}^{\nu}}\right]\beta_{2\mu+1,\nu-1,\lambda}(\bar{x},\gamma)\,d\bar{x}, \tag{2.1}$$

где

$$\beta_{2\mu+1,0,\lambda}(\bar{x},\gamma) = U_{n,m,\lambda}\left[\frac{2^{2\mu}}{(2\mu)!\,\lambda^{2\mu}}\Theta_{\bar{x}}(x)\sin^{2\mu}\frac{\lambda}{2}(x-\bar{x}),\gamma\right], \tag{2.2}$$

и для $\nu = 2, \dots, m$

$$\beta_{2\mu+1,\nu-1,\lambda}(\bar{x},\gamma) = \int_a^x \beta_{2\mu+1,0,\lambda}(t,\gamma)\frac{(\bar{x}-t)^{\nu-1}}{(\nu-2)!}\,dt. \tag{2.3}$$

При $\mu = 0$ надо вместо $U_{n,m,\lambda}$ брать $\overline{U}_{n,m,\lambda}$ (теорема 5, (α)) и считать

$$\prod_{l=1}^{0}\left(\frac{d^2}{d\bar{x}^2} + \lambda^2 l^2\right) \equiv 1.$$

Формулу (2.1) при $\mu = n$, $\nu = m = 1$, $\lambda = 1$ без такого конструктивного (2.2) определения $\beta_{2n+1,0,1}$ установил А. Сард [16].

Лемма 2. *Пусть $\nu \geqslant 2$ и $b - a = \frac{2\pi}{\lambda}$. Тогда функция $\beta_{2\mu+1,\nu-1,\lambda}$ меняет знак по $\bar{x}$, по крайней мере, на $2\mu + \nu - 1$ раз меньше, чем функция $\beta_{1,0,\lambda}(x,\gamma)$.*

Действительно, во-первых, в силу леммы 1 функция $\beta_{2\mu+1,\nu-1,\lambda}(\bar{x},\gamma)$ меняет знак на $\nu - 2$ раза меньше, чем функция $\beta_{2\mu+1,1,\lambda}$ (на $\nu - 1$ раз меньше, чем $\beta_{2\mu+1,0,\lambda}(\bar{x},\gamma)$. Во-вторых, в силу утверждения 4 для $k = 2, 3, \dots, 2\mu + 1$

$$\left\{\frac{\overline{W}^2_{k-1}}{\overline{W}_{k-2}\overline{W}_k}\cdots\frac{d}{d\bar{x}}\left(\frac{\overline{W}^2_1}{\overline{W}_0\overline{W}_2}\frac{d}{dx}\frac{\beta_{2\mu+1,1,\lambda}(\bar{x},\gamma)}{\overline{W}_1}\right)\right\} =$$

$$= \left\{\frac{2}{\lambda(k-1)}\cos^2 z \dots \frac{d}{d\bar{x}}\left(\frac{2}{\lambda}\cos^2 z\frac{d}{d\bar{x}}\frac{\beta_{2\mu+1,1,\lambda}(\bar{x},\gamma)}{\cos^{2\mu} z}\right)\right\},$$

$$z = \frac{\lambda}{2}\left(\bar{x} - a - \frac{\pi}{\lambda}\right).$$

Так как в силу леммы 1 для функции $\beta_{2\mu+1,1,\lambda}(\bar{x},\gamma)$ точки $\bar{x} = a, a + \frac{2\pi}{\lambda}$ являются нулями кратности не меньшей $2\mu + 1$, то в силу замечания 5 функция $\beta_{2\mu+1,1,\lambda}(\bar{x},\gamma)$ меняет знак по $\bar{x}$, по крайней мере, на $2\mu + 1$ раз меньше, чем $\beta_{1,0,\lambda}(\bar{x},\gamma)$.

Следствие 2. *Если функция* $\beta_{1,0,\lambda}(\bar{x},\gamma)$ *меняет знак не более* $2n+m-1$ *раза, то функция* $\beta_{2n+1,m-1,\lambda}(\bar{x},\gamma)$ *знака не меняет при* $m \geqslant 2$.

Замечание 6. Если $b-a<\frac{2\pi}{\lambda}$, то утверждения леммы 2 и следствия 2 справедливы и при $m=\nu=1$. В силу утверждения 4 и замечания 4 $\beta_{2\mu+1,0,\lambda}(x,\gamma)$ меняет знак на 2μ раз меньше, чем

$$\bar{\beta}_{1,0,\lambda}(\bar{x},\gamma)=U_{n,m,\lambda}\left[\frac{\cos^{2\mu}\lambda\,\dfrac{x-\alpha}{2}}{\cos^{2\mu}\lambda\,\dfrac{\bar{x}-\alpha}{2}}\,\Theta_{\bar{x}}(x),\gamma\right],\qquad \alpha=\frac{a+b}{2}.$$

Утверждение 6. Если для некоторого i $b_i-a_i=\frac{\pi}{\lambda}$ и система линейно независимых функций такова:

$$(\cos\lambda x_i,\quad \sin\lambda x_i,\ \cos 3\lambda x_i,\ \sin 3\lambda x_i,\ldots,\cos(2n-1)\lambda x_i,\ \sin(2n-1)\lambda x_i),$$

то для каждого $\mu_i=2k$ $(k=1,\ldots,n;\ s_i=2n)$ $W_{\mu_i}\neq 0$ и

$$D_{\mu_i}(f)=D_{2k,x_i}(f)=\prod_{p=1}^{k}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\lambda^2(2p-1)^2\right)f;$$

$$H_{\mu_i}(x_i,\bar{x}_i)=H_{2k}(x_i,\bar{x}_i)=\frac{\sin^{2k-1}\lambda(x_i-\bar{x}_i)}{\lambda^{2k-1}(2k-1)!}.$$

Аналогично устанавливается, что линейными комбинациями функций этой системы можно образовать ей «равносильную»:

$$(\cos^{2n-1}\lambda(x_i-\alpha),\ \operatorname{tg}\lambda(x_i-\alpha)\cos^{2n-1}\lambda(x_i-\alpha),\ldots$$
$$\ldots,\operatorname{tg}^{2n-1}\lambda(x_i-\alpha)\cos^{2n-1}\lambda(x_i-\alpha)),$$

все последовательные вронскианы которой будут отличны от нуля на открытом промежутке $\left(\alpha-\frac{\pi}{2\lambda},\alpha+\frac{\pi}{2\lambda}\right)$, т. е. $W_{\gamma_i}\neq 0$ $(\gamma_i=1,\ldots,s_i)$ $\alpha-\frac{\pi}{2\lambda}<x_i<\alpha+\frac{\pi}{2\lambda}$, при этом

$$W_{\gamma_i}=W(\cos^{2n-1}\lambda(x_i-\alpha),\ \operatorname{tg}\lambda(x_i-\alpha)\cos^{2n-1}\lambda(x_i-\alpha),\ldots$$
$$\ldots,\operatorname{tg}^{2n-1}\lambda(x_i-\alpha)\cos^{2n-1}\lambda(x_i-\alpha))=\lambda^{\frac{\gamma_i(\gamma_i-1)}{2}}\,1!\,2!\ldots(\gamma_i-1)!\times$$
$$\times[\cos\lambda(x_i-\alpha)]^{\gamma_i(s_i-\gamma_i)}.$$

Утверждение 7. Пусть операция $R_{\lambda,2m-1,q}[f,\gamma]$ определена для функций $f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, $b-a\leqslant\frac{\pi}{\lambda}$ и аннулируется для функций

$$(\cos\lambda x,\ \sin\lambda x,\ \cos 3\lambda x,\ \sin 3\lambda x,\ldots,\cos(2m-1)\lambda x,$$
$$\sin(2m-1)\lambda x,\ 1,x,\ldots,x^{q-1})$$

(если 1 сюда не входит, то $q=0$).

Тогда для $f \in L^p_{2\mu+\nu}[a, b]$ $(p \geqslant 1;\ 1 \leqslant \mu \leqslant m;\ 0 \leqslant \nu \leqslant q)$ в силу утверждений 1 и 6:

$$R_{\lambda,2m-1,q}[f,\gamma] = (-1)^{\nu-1}\int_a^b \left[\prod_{k=1}^{\mu}\left(\frac{d^2}{d\bar{x}^2} + \lambda^2(2k-1)^2\right)\frac{d^\nu f(\bar{x})}{d\bar{x}^\nu}\right]\beta_{2\mu,\nu,\lambda}(\bar{x},\gamma)\,d\bar{x},$$

где

$$\beta_{2\mu,0,\lambda}(\bar{x},\gamma) = R_{\lambda,2m-1,q}\left[\frac{\Theta_{\bar{x}}(x)}{2^{2\mu-1}(2\mu-1)!}\sin^{2\mu-1}\lambda(x-\bar{x}),\gamma\right],$$

$$\beta_{2\mu,\nu,\lambda}(\bar{x},\gamma) = \int_a^{\bar{x}}\beta_{2\mu,0,\lambda}(x,\gamma)\frac{(\bar{x}-x)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\,dx. \tag{2.4}$$

Для $f \in L^p_\nu[a, b]$ $(p \geqslant 1;\ 1 \leqslant \nu \leqslant q)$

$$R_{\lambda,2m-1,q}[f,\gamma] = (-1)^\nu\int_a^b\frac{d^\nu f(\bar{x})}{d\bar{x}^\nu}\beta_{0,\nu,\lambda}(\bar{x},\gamma)\,d\bar{x},$$

где

$$\beta_{0,1\lambda}(\bar{x},\gamma) = \bar{R}_{\lambda,2m-1,q}[\Theta_{\bar{x}}(x),\gamma]$$

и $\beta_{0,\nu,\lambda}$ определяется по формуле (2.4).

Лемма 3. *Пусть $\nu \geqslant 1$ и $b - a = \dfrac{\pi}{\lambda}$. Тогда функция $\beta_{2\mu,\nu,\lambda}(\bar{x},\gamma)$ меняет знак по $\bar{x}$, по крайней мере, на $2\mu+\nu-1$ раз меньше, чем функция $\beta_{0,1,\lambda}(\bar{x},\gamma)$.*

Действительно, во-первых, в силу леммы 1 функция $\beta_{0,\nu,\lambda}(\bar{x},\gamma)$ меняет знак на $\nu-1$ раз меньше, чем $\beta_{0,1,\lambda}(\bar{x},\gamma)$ (на ν раз меньше $\beta_{0,0,\lambda}$). Во-вторых, в силу утверждения 6 для $k = 2, 3, \ldots, 2\mu$

$$\left\{\frac{\overline{W}^2_{k-1}}{\overline{W}_{k-2}\overline{W}_k}\cdots\frac{d}{d\bar{x}}\left(\frac{\overline{W}^2_1}{\overline{W}_0\overline{W}_2}\frac{d}{d\bar{x}}\frac{\beta_{2\mu,\nu,\lambda}(\bar{x},\gamma)}{\overline{W}_1}\right)\right\} =$$

$$= \left\{\frac{\cos^2\lambda\left(\bar{x}-a-\dfrac{\pi}{2\lambda}\right)}{\lambda(k-1)}\cdots\frac{d}{d\bar{x}}\left(\frac{\cos^2\lambda\left(\bar{x}-a-\dfrac{\pi}{2\lambda}\right)}{\lambda}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{d}{d\bar{x}}\frac{\beta_{2\mu,\nu,\lambda}(\bar{x},\gamma)}{\cos^{2\mu-1}\left(\bar{x}-a-\dfrac{\pi}{2\lambda}\right)}\right)\right\}.$$

И так как в силу теоремы 5 [5] для функций $\beta_{2\mu,\nu,\lambda}(\bar{x},\gamma)$ точки $\bar{x}=a$, $a+\dfrac{\pi}{\lambda}$ являются нулями кратности, не меньшей $2\mu+\nu-1$, то в силу замечания 5 функция $\beta_{2\mu,\nu,\lambda}(\bar{x},\gamma)$ меняет знак по $\bar{x}$ на 2μ раз меньше, чем функция $\beta_{0,\nu,\lambda}(\bar{x},\gamma)$.

Следствие 3. *Если $\beta_{0,1,\lambda}(\bar{x},\gamma)$ меняет знак не более $2m+q-1$ раз, то функция $\beta_{2m,q,\lambda}(\bar{x},\gamma)$ не меняет знака* при $q \geqslant 1$.

Замечание 7. Если $b-a<\frac{\pi}{\lambda}$, то лемма 3 и следствие 3 справедливы и при $q=\nu=0$. В силу утверждения 6 и замечания 4 $\beta_{2\mu,0,\lambda}(\overline{x},\gamma)$ меняет знак на $2\mu-1$ раз меньше, чем

$$\overline{\beta}_{1,0,\lambda}(\overline{x},\gamma)=R_{\lambda,2m-1,0}\left[\frac{\cos^{2\mu-1}\lambda(x-\alpha)}{\cos^{2\mu-1}\lambda(\overline{x}-\alpha)}\,\Theta_{\overline{\lambda}}(x),\gamma\right];\qquad \alpha=\frac{a+b}{2}.$$

2. Остаточные члены отрезков ряда Фурье. Поскольку представление остаточного члена отрезка ряда Фурье в многомерном случае в рассматриваемых пространствах в силу теоремы 8 сводится к одномерному случаю, остановимся на последнем.

Утверждение 8. Если функция $f(x)$ имеет период 2π, то ее можно представить в виде

$$f(x)=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{2^m-1}f\left(x+\frac{k\pi}{2^{m-1}}\right)+\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{2^l}\sum_{r=0}^{2^l-1}(-1)^r f\left(x+\frac{r\pi}{2^{l-1}}\right),$$

при этом первая сумма является функцией с периодом $\frac{2\pi}{2^m}$, а l-е слагаемое $g_l(x)$ $(l=1,\ldots,m)$ второй суммы обладает свойством:

$$g_l\left(x+\frac{\pi}{2^{l-1}}\right)=-g_l(x).$$

Утверждение 9. Если функция $f(x)$ имеет период $\frac{2\pi}{\lambda}$, где λ — целое число, то ее коэффициенты Фурье a_k и b_k по промежутку длины 2π равны нулю, если $k\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\lambda)$ (для $\lambda=2$ см. [12, стр. 92]).

Утверждение 10. Если функция $f(x)$ такая, что $f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)=-f(x)$, то ее коэффициенты Фурье $a_{k\lambda}$ и $b_{k\lambda}$ по промежутку длины $2\pi/\lambda$ равны нулю, если $k\not\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,2)$ (для $\lambda=1$ см. [12, стр. 92]).

Остановимся теперь, краткости ради, лишь на двух операциях, являющихся частными случаями, рассмотренных в утверждениях 5 и 7:

$$V_{\lambda,n}[f,\gamma]=f(\gamma)-\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}}f(t)\,\frac{\sin(2n+1)\dfrac{\lambda(\gamma-t)}{2}}{\sin\dfrac{\gamma-t}{2}}\,dt=U_{n,1,\lambda}[f,\gamma],$$

$$T_{\lambda,2m-1}[f,\delta]=\frac{f(\delta)+f\left(\frac{\pi}{\lambda}-\delta\right)}{2}-\frac{2\pi}{\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}}f(t)\sum_{k=1}^{m}\sin(2k-1)\delta\times$$
$$\times\sin(2k-1)\lambda t\,dt=R_{\lambda,2m-1,0}[f,\delta].$$

Если $\overline{f}(x)$ — распространение функции $f(x)$ с периодом $\frac{2\pi}{\lambda}$ (λ — целое число), то для $\gamma \neq \frac{2k\pi}{\lambda}$ $(k = 0, 1, \ldots, \lambda)$

$$V_{1,n}[\bar{f}, \gamma] = V_{\lambda,[n/\lambda]}[f, \gamma].$$

Если график функции $f(x)$ симметричен относительно точки $\left(\frac{\pi}{\lambda}, 0\right)$ и прямой $x = \frac{2\pi}{\lambda}$, то

$$V_{\lambda,n}(f, \delta] = T^{s}_{\lambda,2m-1}[f, \delta], \qquad m = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Утверждение 11. Пусть $f \in C_{2n+2}\left[0, \frac{2\pi}{\lambda}\right]$ и $\gamma = 0, \frac{2\pi}{\lambda}$ или одному из корней уравнения

$$r_{\lambda,n}(\gamma) = \frac{\lambda\gamma - \pi}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\lambda\gamma}{k} = 0.$$

Тогда

$$V_{\lambda,n}[f, \gamma] = \frac{2}{\lambda^{2n+2}(n!)^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos k\lambda\gamma}{k^2} \left[\prod_{l=0}^{n} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 l^2\right) f(x)\right]_{x=\Theta\frac{2\pi}{\lambda}} +$$

$$+ \frac{f\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) - f(0)}{\pi} r_{\lambda,n}(\gamma), \qquad 0 < \Theta < 1.$$

Это вытекает из следствия 2, если учесть, что

$$V_{\lambda,n}[f, \gamma] - \frac{\lambda}{2\pi}\left[f\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) - f(0)\right] V_{\lambda,n}[x, \gamma] = U_{n,2,\lambda}[f, \gamma] \tag{2.5}$$

и что в силу леммы 1 функция $\beta_{1,0,\lambda}(\bar{x}, \gamma)$ (см. (2.3)) меняет знак не более $2n+1$ раза и, следовательно, функция $\beta_{2n+1,1,\lambda}$ знака не меняет.

В частности, если $f \in C_{2n+2}\left[\alpha - \frac{\pi}{n}; \alpha + \frac{\pi}{n}\right]$ и $\bar{f}(x)$ — ее распространение с периодом $\frac{2\pi}{\lambda}$, то

$$V_{\lambda,n}[f, \alpha] = \frac{2}{\lambda^{2n+2}(n!)^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \left[\prod_{l=0}^{n} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 l^2\right) f(x)\right]_{x=\alpha+\Theta\frac{\pi}{\lambda}}, \tag{2.6}$$

$$0 < \Theta < 1.$$

Утверждение 12. Пусть $f \in C_{2m+2}\left[0, \frac{\pi}{\lambda}\right]$ и $\gamma = \frac{\pi}{2\lambda}, \frac{k\pi}{\lambda(2m-1)}$ $(k = 1, \ldots, 2m-2)$ или одному из корней уравнения

$$\tau_{\lambda,m}(\gamma) = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin(2k-1)\lambda\gamma}{2k-1} = 0.$$

Тогда

$$T^s_{\lambda,2m-1}[f,\gamma]=\frac{-4}{\pi\lambda^{2m+2}[(2m-1)!!]^2}\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\lambda\gamma}{(2k-1)^3}\times$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda^2(2k-1)^2\right)\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=\Theta\frac{\pi}{\lambda}}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\left[f\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(0)\right]\tau_{\lambda,m}(\gamma),\qquad 0<\Theta<1.$$

При этом $f(x)$ можно заменить на $\frac{1}{2}\left[f(x)+f\left(\frac{\pi}{\lambda}-x\right)\right]$.

Это вытекает из следствия 3 и леммы 1, если рассмотреть операцию

$$T^s_{\lambda,2m-1}[f,\gamma]-\frac{\lambda}{\pi}\left[f\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)+f(0)\right]T^s_{\lambda,2m-1}[x,\gamma]=R_{\lambda,2m-1,2}[f,\gamma]$$

и учесть, что для нее при любых γ

$$\beta_{2\mu,\nu,\lambda}\left(\frac{\pi}{\lambda}-x,\gamma\right)=(-1)^{\nu}\beta_{2\mu,\nu,\lambda}(x,\gamma).$$

Утверждение 13. Пусть: 1) $f(x)\in C_{2\mu+1}[0,2\pi]$, $0\leqslant\mu\leqslant n$; 2) функция

$$D_{2\mu+1}(f,x)=\left\{\frac{d}{dx}\left[\prod_{l=1}^{\mu}\left(\frac{d^2}{dx^2}+l^2\right)\right]\right\}f(x)$$

ортогональна любому тригонометрическому полиному $T_\mu(x)$ порядка μ:

$$\int_0^{2\pi}D_{2\mu+1}(f,x)\left[c_0+\sum_{k=1}^{\mu}c_k\cos kx+\varepsilon_k\sin kx\right]dx=0.$$

Тогда

$$V_{1,n}[f,\gamma]=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}D_{2\mu+1}(f,x)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin k(x-\gamma)}{iP_{2\mu+1}(ik)}\tag{2.7}$$

и имеет место точная оценка

$$|V_{1,n}[f,\gamma]|\leqslant\frac{1}{\pi}E^*_\mu\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin k(x-\gamma)}{|P_{2\mu+1}(ik)|}\right)_L\max_x|D_{2\mu+1}(f,x)|,\tag{2.8}$$

где $P_{2\mu+1}(r)$ — характеристический многочлен оператора $D_{2\mu+1}(f)$, а $E^*_\mu(g)_L$ — наилучшее приближение функции g тригонометрическими полиномами порядка μ в метрике L.

Это вытекает из утверждения 5, если весовую функцию $\beta_{2\mu+1\,0,1}(x,\gamma)$ разложить в ряд Фурье и учесть, что в силу условия 2) к ней можно добавлять любую константу или тригонометрический полином $T\mu(x)$.

Замечание 8. Если функция $f(x)$ не обладает свойством 2), то им обладает функция ([13, стр. 217])

$$\tilde{f}(x)=f(x)-\frac{x}{\pi}\int_0^{2\pi}D_{2\mu+1}(f,t)\left[\frac{1}{2(\mu!)^2}+\sum_{k=1}^{\mu}\frac{\cos k(x-t)}{P'_{2\mu+1}(ik)}\right]dt+T_\mu(x).$$

З а м е ч а н и е 9. Если функции $f(x)$ и $D_{2\mu}(f, x)$ имеют период 2π, то условие 2) выполняется, в чем можно убедиться, если рассмотреть соотношение

$$f(x) = \frac{x}{\pi}\int_0^{2\pi} D_{2\mu+1}[(f-\widetilde{f}), t]\left[\frac{1}{2(\mu!)^2} + \sum_{k=1}^{\mu}\frac{\cos k(x-t)}{P'_{2\mu+1}(ik)}\right]dt +$$

$$+\int_{x_0}^{x} D_{2\mu+1}(\widetilde{f}, t)\frac{2^{2\mu}}{(2\mu)!}\sin^{2\mu}\frac{x-t}{2}\,dt.$$

З а м е ч а н и е 10. Результат, аналогичный (2.8), можно получить, если условие 1) ослабить: $D_{2\mu+1}(f, x)$ измерима и существенно ограничена или принадлежит L^p $(p \geqslant 1)$.

З а м е ч а н и е 11. Для $\mu \geqslant 1$ имеет место оценка

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin kx}{|P_{2\mu+1}(ik)|}\right| \leqslant \frac{4}{\pi}\sup_x\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\right|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)\,|P_{2\mu}[(2\nu+1)(n+1)i]|}.$$

Последнее вытекает из следующего видоизменения результата М. Г. Крейна [17].

Л е м м а 4. *Если $f^{(2\mu-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$ $(\mu \geqslant 1)$ и $D_{2\mu}(f, x)$ существенно ограничена и ортогональна любому тригонометрическому полиному $T_n(x)$ порядка не выше n, то*

$$|V_{1,n}[f, \gamma]| \leqslant \sup_t{}^*|D_{2\mu}(f, t)|\,\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)\,|P_{2\mu}[(2\nu+1)(n+1)i]|},$$

где

$$D_{2\mu}(f, x) = \left[\prod_{l=1}^{\mu}\left(\frac{d^2}{dx^2}+l^2\right)\right]f(x),$$

а $P_{2\mu}(r)$ — характеристический многочлен этого оператора.

Действительно, аналогично (2.7) устанавливается, что

$$V_{1,n}[f, \gamma] = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_{2\mu}(f, t)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos k(t-\gamma)}{P_{2\mu}(ik)}\,dt.$$

А так как коэффициенты $\left\{\frac{1}{|P_{2\mu}(ik)|}\right\}$ образуют трижды монотонную последовательность, то [18]

$$\min_{T_n}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos k(t-\gamma)}{|P_{2\mu}(ik)|} - T_n(t)\right|dt =$$

$$= 4\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)\,|P_{2\mu}[(2\nu+1)(n+1)i]|}.$$

З а м е ч а н и е 12. Если воспользоваться неравенством Н. И. Ахиезера [19, стр. 383], то при $\mu \geqslant 1$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin kx}{|P_{2\mu+1}(ik)|}\right| \leqslant \sup_x\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\right|\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k^2\omega'(k^2)}\cdot\frac{\sin^2\frac{k\pi}{4(n+1)}}{\cos\frac{k\pi}{2(n+1)}}\right|;$$

$$\omega(z)=\prod_{l=1}^{\mu}(z-l^2).$$

У т в е р ж д е н и е 14. Пусть: 1) $f(x)\in C_{2\mu+2}[0,2\pi]$ $(0\leqslant\mu\leqslant n)$;

2) функции $f(x)$ и $D_{2\mu+1}(f,x)$ 2π-периодичны (см. замечание 9). Тогда

$$V_{1,n}[f,\gamma]=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}D_{2\mu+2}(f,t)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos k(t-\gamma)}{P_{2\mu+2}(ik)}\,dt$$

и имеет место точная оценка

$$|V_{1,n}[f,\gamma]|\leqslant\frac{1}{\pi}E_\mu^*\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos k(t-\gamma)}{|P_{2\mu+2}(ik)|}\right)_L\max_x|D_{2\mu+2}(f,x)|,$$

где $D_{2\mu+2}(f)=\frac{d}{dx}D_{2\mu+1}(f)$, а $P_{2\mu+2}(r)$ — характеристический многочлен этого оператора.

Это устанавливается аналогично (2.7) (см. еще (2.5)).

З а м е ч а н и е 13. Не останавливаясь на замечаниях, аналогичных замечаниям 8—11, укажем лишь на возможность установления результатов, подобных утверждениям 13 и 14, для операций $V_{\lambda,n}(f,\gamma)$ и $T^s_{\lambda,n}(f,\gamma)$.

3. О с т а т о ч н ы е ч л е н ы т р и г о н о м е т р и ч е с к и х и н т е р п о л я ц и й. Учтя теорему 8, рассмотрим лишь следующие операции:

1) Пусть $0\leqslant x_0<x_1<\ldots<x_{2n}<2\pi$, $0\leqslant\gamma\leqslant2\pi$,

$$N_n[f,\gamma]=f(\gamma)-\sum_{k=0}^{2n}f(x_k)t_k(\gamma);\qquad t_k(x)=\prod_{i=0(i\neq k)}^{2n}\frac{\sin\frac{x-x_i}{2}}{\sin\frac{x_k-x_i}{2}};$$

2) пусть $0\leqslant x_0<x_1<\ldots<x_n\leqslant\pi$, $0\leqslant\gamma\leqslant\pi$,

$$N_n^c[f,\gamma]=f(\gamma)-\sum_{k=0}^{n}f(x_k)c_k(\gamma),\qquad c_k(x)=\prod_{i=0\,(i\neq k)}^{n}\frac{\cos x-\cos x_i}{\cos x_k-\cos x_i};$$

3) пусть $0<\varepsilon\leqslant x_1<\ldots<x_n\leqslant\pi-\varepsilon$, $\varepsilon\leqslant\gamma\leqslant\pi-\varepsilon$,

$$N_n^s[f,\gamma]=f(\gamma)-\sum_{k=1}^{n}f(x_k)s_k(\gamma);\qquad s_k(x)=\prod_{i=0\,(i\neq k)}^{n}\frac{\cos x-\cos x_i}{\cos x_k-\cos x_i}\cdot\frac{\sin x}{\sin x_k}.$$

Следующие операции являются частными случаями рассмотренных в утверждениях 5 и 7:

$$N_n[f,\gamma]=U_{n,1,1}[f,\gamma],$$

$$N^c_{1,n}[f,\gamma] = N^c_n\left[\frac{1}{2}(f(x)+f(\pi-x)),\ \gamma\right] = U_{\left[\frac{n}{2}\right],2,2}[f,\gamma],$$

$$N^c_{2n}[f,\gamma] = N^c_n\left[\frac{1}{2}(f(x)-f(\pi-x)),\ \gamma\right] = R_{1,2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1,1}[f,\gamma],$$

$$N^s_{1,n}[f,\gamma] = N^s_n\left[\frac{1}{2}(f(x)-f(\pi-x)),\ \gamma\right] = U_{\left[\frac{n}{2}\right],1,2}[f,\gamma],$$

$$N^s_{2n}[f,\gamma] = N^s_n\left[\frac{1}{2}(f(x)+f(\pi-x)),\ \gamma\right] = R_{1,2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1,0}[f,\gamma].$$

Утверждение 15. Пусть $f\in C_{2n+2}[0,2\pi]$ и или $x_0=0$, или $\gamma=0,\ 2\pi$. Тогда

$$N_n[f,\gamma] = \frac{(\gamma-\pi)^2-\sum\limits_{k=0}^{2n}(x_k-\pi)^2\,t_k(\gamma)}{2(n!)^2}\left[\prod_{l=0}^{n}\left(\frac{d^2}{dx^2}+l^2\right)f(x)\right]_{x=\xi}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}[f(2\pi-f(0)]\left[\gamma-\sum_{k=0}^{2n}x_kt_k(\gamma)\right],\qquad 0<\xi<2\pi.$$

Это вытекает из следствия 2, если учесть, что

$$N_n[f,\gamma]-\frac{1}{2\pi}[f(2\pi)-f(0)]\,N_n[x,\gamma] = U_{n,2,1}[f,\gamma]$$

и что функция $\beta_{1,0,1}(\bar{x},\gamma)$ (см. замечание 6):

$$\beta_{1,0,1}(\bar{x},\gamma) = \Theta_{\bar{x}}(\gamma)-\sum_{k=0}^{2n}\Theta_{\bar{x}}(x_k)\,t_k(x_k)+\frac{1}{2\pi}\left[\gamma-\sum_{k=0}^{2n}x_kt_k(\gamma)\right],\quad 0<\bar{x}<2\pi,$$

меняет знак не более $2n+1$ раза.

Е. Я. Ремез установил [3], что если $0<\gamma,\ x_1,\ \ldots,\ x_{2n}<2\pi$, то для $f\in C_{2n+1}$

$$N_n[f,\gamma] = \frac{1}{(n!)^2}\left[\gamma-\sum_{k=0}^{2n}x_kt_k(\gamma)\right]\left[\prod_{l=1}^{n}\left(\frac{d^2}{dx^2}+l^2\right)\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=\xi},\quad 0<\xi<2\pi.$$

Аналогично утверждению 13 устанавливается такое утверждение.

Утверждение 16. Пусть: 1) $f(x)\in C_{2\mu+1}[0,2\pi]$ $(0\leqslant\mu\leqslant n)$; 2) функция $D_{2\mu+1}(f,x)$ ортогональна любому тригонометрическому полиному $T_\mu(x)$ порядка не выше μ. Тогда

$$N_n[f,\gamma] = \frac{(-1)^{\mu+1}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}D_{2\mu+1}(f,t)\,I(n,\mu,t,\gamma)\,dt$$

и имеет место точная оценка

$$|N_n[f,\gamma]|\leqslant\frac{1}{\pi}E^*_\mu(I(n,\mu,t,\gamma))_L\max_t|D_{2\mu+1}(f,t)|,$$

где

$$I(n, \mu, t, \gamma) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\sin k(t-\gamma)}{|P_{2\mu+1}(ik)|} - \sum_{r=0}^{2n} t_r(\gamma)\frac{\sin k(t-x_r)}{|P_{2\mu+1}(ik)|}\right).$$

По поводу других обозначений см. утверждение 13.

Замечание 14. Здесь следует учитывать замечания 6—10, а замечания 11 и 12 в следующем виде:

Замечание 11′. В силу леммы 3 для $\mu \geqslant 1$

$$|I(n, \mu, t, \gamma)| \leqslant \frac{4}{\pi}\sup_t |I(n, 0, t, \gamma)| \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)|P_{2\mu}[(2\nu+1)(n+1)i]|}.$$

Замечание 12′. Для $\mu \geqslant 1$ (см. [19])

$$|I(n, \mu, t, \gamma)| \leqslant \sup_t |I(n, 0, t, \gamma)| \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k^2\omega'(k^2)}\,\frac{\sin^2\dfrac{\pi k}{4(n+1)}}{\cos\dfrac{\pi k}{2(n+1)}}\right|.$$

Аналогично утверждению 14 устанавливается такое утверждение.

Утверждение 17. Пусть: 1) $f \in C_{2\mu+2}[0, 2\pi]$, $0 \leqslant \mu \leqslant n$; 2) функции $f(x)$ и $D_{2\mu+1}(f, x)$ 2π-периодичны. Тогда

$$N_n[f, \gamma] = \frac{(-1)^{\mu+1}}{\pi}\int_0^{2\pi} D_{2\mu+1}(f, t)\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\cos k(t-\gamma)}{|P_{2\mu+2}(ik)|} - \sum_{r=0}^{2n} t_r(\gamma)\frac{\cos k(t-x_r)}{|P_{2\mu+2}(ik)|}\right)\right| dt$$

и имеет место точная оценка

$$|N_n[f, \gamma]| \leqslant \frac{1}{\pi} E_{\mu}^{*}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\cos k(t-\gamma)}{|P_{2\mu+2}(ik)|} - \sum_{r=0}^{2n} t_r(\gamma)\frac{\cos k(t-x_r)}{|P_{2\mu+2}(ik)|}\right)\right)_L \max_t |D_{2\mu+2}(f, t)|.$$

Утверждение 18. Пусть $f \in C_{2\left[\frac{n}{2}\right]+2}[0, 2\pi]$ и узлы симметричны относительно точки $x = \frac{\pi}{2}$ $(x_k + x_{n-k} = \pi,\ k = 0, 1, \ldots, n)$. Тогда

$$N_{1,n}^{c}[f, \gamma] = \frac{\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k - \frac{\pi}{2}\right)^2 c_k(\gamma)}{2\left[\left(2\left[\frac{n}{2}\right]\right)!!\right]^2}\left[\prod_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\frac{d^2}{dx^2} + 4l^2\right) f(x)\right]_{x=\xi},$$

$$0 < \xi < \pi.$$

Это вытекает из следствия 2, если учесть, что в данном случае (при любых узлах)

$$\beta_{2\mu+1,\nu-1,2}(\pi-\bar{x},\gamma)=(-1)^{\nu}\beta_{2\mu+1,\nu-1,2}(\bar{x},\gamma) \tag{2.9}$$

и что $\beta_{1,0,2}(\bar{x},\gamma)$ может менять знак лишь в точках $x_0,\ldots,x_n$, γ, $\pi-\gamma$, кроме наименьшей и наибольшей из них, т. е. не более $n+1$ раза. Следовательно, функция $\beta_{2\left[\frac{n}{2}\right]+1,1,2}(\bar{x},\gamma)$ может менять знак не более одного раза $\left(n+1-2\left[\frac{n}{2}\right]-1\leqslant 1\right)$, т. е. ни разу (в силу (2.9)).

Здесь и впредь не будем останавливаться на представлениях типа, полученных в утверждениях 16 и 17.

Утверждение 19. Пусть $f\in C_{2\left[\frac{n+1}{2}\right]+1}[0,\pi]$ и узлы симметричны относительно точки $x=\frac{\pi}{2}$ $(x_k+x_{n-k}=\pi,\ k=0,1,\ldots,n)$. Тогда

$$N_{2,n}^{s}[f,\gamma]=\frac{\gamma-\sum\limits_{k=0}^{n}x_kc_k(\gamma)}{\left[\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right)!!\right]^2}\left[\prod_{l=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\left(\frac{d^2}{dx^2}+(2l-1)^2\right)\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=\xi},$$

$$0<\xi<\pi.$$

Это вытекает из следствия 3, если учесть, что в данном случае (при любых узлах)

$$\beta_{2\mu,\nu,1}(\pi-\bar{x},\gamma)=(-1)^{\nu}\beta_{2\mu,\nu,1}(\bar{x},\gamma)$$

и что функция $\beta_{0,1,1}(\bar{x},\gamma)$ меняет знак не более $n+1$ раза (см. утверждение 18).

Утверждение 20. Пусть $f\in C_{2\left[\frac{n}{2}\right]+1}[\varepsilon,\pi-\varepsilon]$; $x_k+x_{n-k}=\pi$ $(k=1,\ldots,n)$. Тогда

$$N_{1,n}^{s}[f,\gamma]=\frac{\gamma-\frac{\pi}{2}-\sum\limits_{k=0}^{n}\left(x_k-\frac{\pi}{2}\right)s_k(\gamma)}{\left[\left(2\left[\frac{n}{2}\right]\right)!!\right]^2}\left[\prod_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\frac{d^2}{dx^2}+4l^2\right)\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=\xi},$$

$$\varepsilon<\xi<\pi-\varepsilon.$$

Это вытекает из замечания 6 и того, что функция $\beta_{1,0,2}(\bar{x},\gamma)$ меняет знак $2\left[\frac{n}{2}\right]$ раз, так как при любом выборе узлов

$$\beta_{2\mu+1,0,2}(\pi-\bar{x},\gamma)=\beta_{2\mu+1,0,2}(\bar{x},\gamma);\qquad \bar{\beta}_{1,0,2}(\pi-\bar{x},\gamma)=\bar{\beta}_{1,0,2}(\bar{x},\gamma).$$

Утверждение 21. Пусть $f \in C_{2\left[\frac{n+1}{2}\right]}[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$; $x_k + x_{n-k} = \pi$ ($k = 1, \ldots, n$). Тогда

$$N_{2,n}^{\sim}[f, \gamma] = \frac{1 - \sum_{k=1}^{n} s_k(\gamma)}{\left[\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1\right)!!\right]^2} \left[\prod_{l=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \left(\frac{d^2}{dx^2} + (2l-1)^2\right) f(x)\right]_{x=\xi},$$

$$\varepsilon < \xi < \pi - \varepsilon.$$

Это вытекает из замечания 7 и того, что функция $\overline{\beta}_{1,0,1}(\overline{x}, \gamma)$ меняет знак не более $2\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1$ раз, так как при любом выборе узлов

$$\beta_{2\mu,0,1}(\pi - \overline{x}, \gamma) = \beta_{2\mu,0,1}(\overline{x}, \gamma); \qquad \overline{\beta}_{1,0,1}(\pi - \overline{x}, \gamma) = -\overline{\beta}_{1,0,1}(\overline{x}, \gamma).$$

Остановимся еще лишь на одном примере. Для $f \in C_{2,2}[a_i = -1, b_i = 1, i = 1, 2]$

$$V[f] = \iint\limits_{x_1^2 + x_2^2 \leq 1} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 - \pi f(0, 0) = \frac{\pi}{8}\left[\frac{\partial^2 f(\xi, \eta_1)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f(0, \eta_2)}{\partial x_2^2}\right].$$

Это вытекает из теоремы 8, если считать, что $\omega_{t_1}[f] = f(0, x_2)$ (сравни [20]). По поводу других примеров см. [4, 5] (интерполяционные и кубатурные формулы) и [21] (повторные полиномы Бернштейна и сингулярные интегралы Валле-Пуссена). В примере 1 [4] должно быть $A_5(x, y) = \frac{x_2}{2}(1 - 4y^2)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. В примере 4 [21] в правой части пропущен множитель 2 (см. (2.6)).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. С. Банах, Курс функціонального аналізу, «Радянська школа», К., 1948.
2. Є. Я. Ремез, Про деякі класи лінійних функціоналів у просторах C_p та про остаткові члени формул наближеного аналізу. I, Збірник праць Ін-ту математики АН УРСР, № 3, 1939.
3. Є. Я. Ремез, Про деякі класи лінійних функціоналів у просторах C_p та про остаткові члени формул наближеного аналізу. II. Збірник праць Ін-ту математики АН УРСР, № 4, 1940.
4. И. А. Эзрохи, Общие формы остаточных членов линейных формул многомерного приближенного анализа. I, Матем. сб., 38 (80), 4. 1956.
5. И. А. Эзрохи, О функционалах в пространствах $C_{s_1,\ldots,s_n}$ и $L^p_{s_1,\ldots,s_n}$, аннулирующихся на обобщенных многочленах многих переменных, ДАН СССР, т. 117, М., 1957.
6. Э. Гурса, Курс математического анализа, т. 2, ч. 2, ГТТИ, М., 1933.
7. Y. Polia, On the mean-valye theorem corresponding to a given linear homogeneons differential equation, Trans of the Amer Math. Soc., vol. 24, 1924.
8. Т. Г. Езрохі, Функціонально-аналітична розробка загального методу побудови залишкових членів для різних лінійних формул багатовимірного наближеного аналізу, Наукові записки Київськ. пед. ін-ту, фіз.-матем. сер., т. XVI, № 5, 1954.
9. Т. Г. Эзрохи, И. А. Эзрохи, О представлении остаточных членов некоторых n-мерных формул приближения, Изв. КПИ, 19, 1956.
10. M. Cowurin, Über die Stilltjessche Integration abstrakter Funktionen. Fund. Math., 1936.
11. А. Лебег, Интегрирование и отыскание примитивных функций, ГТТИ, М., 1934.
12. Г. Полиа, Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа, т. 2, ГТТИ, М., 1956.
13. В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, ГОНТИ. М., 1938.
14. В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, ОНТИ—ГТТИ, М., 1934.
15. С. Н. Бернштейн, Конструктивная теория функций, ГТТИ, М., 1949.

16. A. S a r d, Integral representations of remainders, Duke Math. J., vol. 15, 1948.
17. М. Г. К р е й н, К теории наилучшего приближения периодических функций, ДАН СССР, т. 18, 1938.
18. Sz. B. N a g y, Über gewisse Extremolfragen bei transformeirten trigonometrischen Entwicklungen, Berichte Acad. D. W. iss. Leipzig, 90, 1938.
19. Н. И. А х и е з е р, Лекции по теории аппроксимаций, изд. 2, «Наука», М., 1965.
20. A. S a r d, Remainders as integrals of partial derivatives, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 3, 1952.
21. И. А. Э з р о х и, Общие методы построения остаточных членов линейных формул приближения, I Межвузов. конф. по конструктивной теории функций, Л., 1959.
22. И. А. Э з р о х и, Общие функционально-аналитические методы установления алгоритма для построения остаточных членов линейных многомерных формул приближений, Труды II Всесоюзн. матем. съезда, 1, Изд-во АН СССР, М., 1956.
23. И. А. Э з р о х и, Общие формы остаточных членов линейных формул многомерного приближенного анализа, II Матем. сб., 43, 1, 1957.
24. С. М. Н и к о л ь с к и й, Квадратурные формулы, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 16, М., 1952.
25. A. S a r d, Remainders functions of several variables, Acta Math., 84, 1951.
26. A. S a r d, Linear functionals on $K_{p,q}$, B_p, Proc. Internat. Cong. Math., 2, Amsterdam 1954.
27. A. S a r d, Linear approximation, Amer. Math. Soc., Providence, 1963.

Поступила 4.VIII 1967 г.
Украинская сельскохозяйственная академия