УДК 517.948.34

Численно-аналитический метод исследования периодических систем интегро-дифференциальных уравнений

Г. Вахабов

Вопросу существования и нахождения периодических решений систем интегро-диффереициальных уравнений посвящены исследования ряда авторов [1—6]. Большинство из них относятся к перенесению известных результатов теории обыкновенных дифференциальных уравнений на системы интегро-дифференциальных уравнений. В частности, в работе автора [6] изучались вопросы существования и отыскания периодических решений систем интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t, x(t)) + \int\limits_0^{h(t)} \psi(t, s, x(s))\, ds$$

($h(t)$ — периодическая функция) методом, предложенным в работах [7, 8] для периодических по времени систем обыкновенных дифференциальных уравнений, который позволяет находить периодические решения рассматриваемых уравнений в виде равномерно сходящихся последовательностей периодических функций, а также оценивать отклонение точного решения от его приближений.

Когда $h(t)$ не является периодической функцией, возникают затруднения при изучении периодических решений систем интегро-дифференциальных уравнений. Объясняется это тем, что в этом случае рассматриваемые уравнения не всегда имеют периодические решения. Поэтому несомненный интерес представляет отыскание необходимых и достаточных условий существования периодических решений интегро-дифференциальных уравнений, когда $h(t)$ не является периодической функцией.

В настоящей работе изучается аналогичный вопрос, что и в [6], но для более общих систем интегро-дифференциальных уравнений.

1. Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t,\ x,\ \int\limits_0^{t} \varphi(t, s, x(s))\, ds\right), \tag{1}$$

где $f(t, x, y) = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ и $\varphi(t, s, x) = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ — периодические по t и s с периодом T функции, непрерывные при

$$-\infty < t,\ s < \infty; \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in D; \qquad y = (y_1, \ldots, y_m) \in D_1, \tag{2}$$

D, D_1 — ограниченные области эвклидовых пространств E_n, E_m. Нас интересует вопрос существования и отыскания периодических периода T решений уравнения (1). Следует заметить, что в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений условия существования периодических решений уравнения (1) носят довольно специфический характер. Это связано с тем, что для интегро-дифференциальных уравнений функция $x(t+T)$, полученная из решения $x(t)$ сдвигом аргумента на период T, может не быть решением исходного уравнения. В связи с этим решения $x(t)$ интегро-дифференциального уравнения разделяются на решения, для которых вместе с $x(t)$ решением является и $x(t+T)$ и те, для которых это свойство не имеет места. Найдем условия, необходимые и достаточные для такого разделения решений. Если $x(t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению, то

$$\frac{dx(t)}{dt}=f\left(t,\ x(t),\ \int_0^t \varphi(t,\ s,\ x(s))\,ds\right). \tag{3}$$

Заменяя в тождестве (3) t на $t+T$, получим

$$\frac{dx(t+T)}{dt}=f\left(t,\ x(t+T),\ \int_0^{t+T}\varphi(t,\ s,\ x(s))\,ds\right)=$$

$$=f\left(t,\ x(t+T),\ \int_{-T}^{t}\varphi(t,\ s_1,\ x(s_1+T))\,ds_1\right)=$$

$$=f\left(t,\ x(t+T),\ \int_{-T}^{0}\varphi(t,\ s_1,\ x(s_1+T))\,ds_1+\int_0^t\varphi(t,\ s,\ x(s+T))\,ds\right)=$$

$$=f\left(t,\ x(t+T),\int_0^T\varphi(t,\ s,\ x(s))\,ds+\int_0^t\varphi(t,\ s,\ x(s+T))\,ds\right). \tag{4}$$

Отсюда следует, что вместе с $x(t)$ функция $x(t+T)$ является решением исходного интегро-дифференциального уравнения тогда и только тогда, когда

$$f\left(t,\ x(t+T),\int_0^t\varphi(t,\ s,\ x(s+T))\,ds+\int_0^T\varphi(t,\ s,\ x(s))\,ds\right)\equiv$$

$$\equiv f\left(t,\ x(t+T),\int_0^t\varphi(t,\ s,\ x(s+T))\,ds\right). \tag{5}$$

Из (5) следует, в частности, что $x(t+T)$ является решением интегро-дифференциального уравнения, если

$$\int_0^T\varphi(t,\ s,\ x(s))\,ds=0. \tag{6}$$

Для иллюстрации изложенного выше разделения решений интегро-дифференциального уравнения приведем примеры.

Пример 1.

$$\frac{dx}{dt}=f\left(t,\ x,\ \int_0^t\varphi(t,\ s)\,ds\right). \tag{7}$$

В случае, когда $\int\limits_0^t \varphi(t, s)\, ds$ является периодической функцией, т. е. $\int\limits_0^T \varphi(t, s)\, ds = 0$, функция $x(t+T)$ вместе с $x(t)$ является решением уравнения (7). Например, $\varphi(t, s) = \sin t \sin s$.

В случае, когда $\int\limits_0^t \varphi(t, s)\, ds$ не является периодической функцией, т. е. $\int\limits_0^T \varphi(t, s)\, ds = \psi(t) \neq 0$, следовательно $\int\limits_0^t \varphi(t, s)\, ds = \psi(t)\, t + \Phi(t)$, $\Phi(t) \neq 0$ — периодическая функция, тогда $x(t)$ является решением, а $x(t+T)$ не является решением уравнения (7). Например, $\varphi(t, s) = \sin t + \sin s$.

Пример 2.

$$\frac{dx}{dt} = -\int\limits_0^t x(s)\, ds.$$

Решением этого уравнения является функция $x(t) = c \cos t$. Следовательно, $x(t + 2\pi)$ тоже является решением данного уравнения, в то время как $x(t + \pi/2)$ уже не является решением данного уравнения, хотя правая часть рассматриваемого уравнения периодична с произвольным периодом.

Нарушение равенства (5) влечет за собой то, что функция $x(t+T)$ не является решением исходного интегро-дифференциального уравнения. Если учесть теперь, что периодическое периода T решение $x(t)$ интегро-дифференциального уравнения удовлетворяет это уравнение вместе с функцией $x(t+T) = x(t)$, то для периодического решения необходимо выполняется соотношение (5), т. е.

$$f\left(t, x(t), \int\limits_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds + \int\limits_0^T \varphi(t, s, x(s))\, ds\right) \equiv$$
$$\equiv f\left(t, x(t), \int\limits_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds\right). \tag{8}$$

Рассмотрим подробнее соотношение (8). Найдем эквивалентные ему более простые условия. Применяя формулу конечного приращения Лагранжа, из (8) получим

$$\frac{\partial f\left(t, x(t), \int\limits_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds + \theta \int\limits_0^T \varphi(t, s, x(s))\, ds\right)}{\partial y} \int\limits_0^T \varphi(t, s, x(s))\, ds \equiv 0, \tag{9}$$

где $0 < \theta < 1$.
Таким образом, если в области $(-\infty, \infty) \times D \times D_1$

$$\det \left| \frac{\partial f(t, x, y)}{\partial y} \right| \neq 0, \tag{10}$$

то из (9) следует, что

$$\int\limits_0^T \varphi(t, s, x(s))\, ds \equiv 0. \tag{11}$$

Отсюда вытекает, что если система (1) удовлетворяет условию (10), то необходимое условие существования периодического решения этой системы состоит в том, чтобы тождественно по t выполнялось равенство (11). Для системы, удовлетворяющей условиям (10), (11), проходит ниже приводимая схема отыскания периодического решения.

Пусть функции $f(t, x, y)$, $\varphi(t, s, x)$ для $t, s, x, x', x'', y, y', y''$ из области (2) удовлетворяют неравенствам

$$|f(t, x, y)| \leqslant \mathbf{M}, \qquad |f(t, x', y') - f(t, x'', y'')| \leqslant \mathbf{K}|x' - x''| + \mathbf{L}|y' - y''|,$$
$$|\varphi(t, s, x)| \leqslant \mathbf{N}, \qquad |\varphi(t, s, x') - \varphi(t, s, x'')| \leqslant \mathbf{Q}|x' - x''|, \tag{12}$$

где $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ — векторы с неотрицательными координатами: $\mathbf{M} = (M_1, \ldots, M_n)$, $\mathbf{N} = (N_1, \ldots, N_m)$; $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{Q}$ — матрицы с неотрицательными элементами: $\mathbf{K} = \{K_{ij}\}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, $\mathbf{L} = \{L_{ij}\}$ $(i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)$, $\mathbf{Q} = \{Q_{ij}\}$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$, причем неравенства (12) понимаются покоординатно. Обозначим

$$\mathbf{W} = \mathbf{K} + \mathbf{L}\mathbf{Q}\frac{T}{2}. \tag{13}$$

В дальнейшем рассмотрим лишь такие системы (1), для которых область D, вектор $\mathbf{M}$, матрица $\mathbf{W}$ и функция $f(t, x, y)$ удовлетворяют условиям:

a) множество $D - \dfrac{\mathbf{M}T}{2}$ не пусто;

b) собственные числа матрицы $\dfrac{\mathbf{W}T}{3}$ лежат в круге единичного радиуса;

c) в области $(-\infty, \infty) \times D \times D_1$ $\det\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \neq 0$.

По аналогии с [7] назовем такие системы T-системами. Вопрос нахождения периодических решений T-систем решается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть система* (1) *является T-системой. Предположим, что $x(t) = \psi(t)$ — периодическое периода T решение этой системы, проходящее при $t = 0$ через точку $x_0 \in D - \dfrac{\mathbf{M}T}{2}$. Тогда*

$$\psi(t) = \lim_{m \to \infty} x_m(t, x_0), \tag{14}$$

$$|\psi(t) - x_m(t, x_0)| < \left(\frac{\mathbf{W}T}{3{,}1}\right)^m \left[\left(E - \frac{\mathbf{W}T}{3{,}1}\right)^{-1} + \frac{\delta_{1m}}{30}E\right]\frac{\mathbf{M}T}{2}$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{15}$$

где $x_m(t, x_0)$ — периодические по t периода T функции, определяемые соотношениями

$$x_m(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \Bigg\{ f\Bigg(t, x_{m-1}(t, x_0), \int_0^t [\varphi(t, s, x_{m-1}(s, x_0)) - \overline{\varphi(t, s, x_{m-1}(s, x_0))}]\, ds\Bigg) -$$
$$- \overline{f\Bigg(t, x_{m-1}(t, x_0), \int_0^t [\varphi(t, s, x_{m-1}(s, x_0)) - \overline{\varphi(t, s, x_{m-1}(s, x_0))}]\, ds\Bigg)} \Bigg\} dt =$$
$$= x_0 + \int_0^t \Bigg\{ f\Bigg(t, x_{m-1}(t, x_0), \int_0^t \Bigg[\varphi(t, s, x_{m-1}(s, x_0)) -$$
$$- \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t, s, x_{m-1}(s, x_0))\, ds\Bigg] ds\Bigg) - \frac{1}{T}\int_0^T f\Bigg(t, x_{m-1}(t, x_0),$$

$$\int_0^t \left[\varphi(t, s, x_{m-1}(s, x_0)) - \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t, s, x_{m-1}(s, x_0))\, ds \right] ds \Bigg) dt \Bigg\} dt, \qquad (16)$$

$$E \text{ — единичная матрица, } \delta_{1m} = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq 1, \\ 1 & \text{при } m = 1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть система (1) имеет периодическое периода T решение $x(t) = \psi(t)$. Тогда функция $x = \psi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f\left(t, x(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds\right) dt$$

и

$$\overline{f\left(t, \psi(t), \int_0^t \varphi(t, s, \psi(s))\, ds\right)} = 0,$$

и отсюда в силу условия c) $\overline{\varphi(t, s, \psi(s))} = 0$. Следовательно, $\psi(t)$ является периодическим периода T решением уравнения

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \Bigg\{ f\left(t, x(t, x_0), \int_0^t \left[\varphi(t, s, x(s, x_0)) - \overline{\varphi(t, s, x(s, x_0))}\right] ds\right) -$$

$$- \overline{f\left(t, x(t, x_0), \int_0^t \left[\varphi(t, s, x(s, x_0)) - \overline{\varphi(t, s, x(s, x_0))}\right] ds\right)} \Bigg\} dt. \qquad (17)$$

Теперь для доказательства сходимости последовательности (16) воспользуемся неравенствами (12) и условиями a) и b) Так как $2t\left(1 - \frac{t}{T}\right) \leqslant \frac{T}{2}$ для $t \in [0, T]$ и учитывая (13), находим

$$|x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leqslant \mathbf{W}\Bigg[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t |x_m(t, x_0) -$$

$$- x_{m-1}(t, x_0)|\, dt + \frac{t}{T}\int_t^T |x_m(t, x_0) - x_{m-1}(t, x_0)|\, dt\Bigg]$$

для всех $m \geqslant 1$ и всех t из отрезка $[0, T]$. Далее, поступая как в [6] и применяя лемму 2 [7], имеем

$$|x_{m+k}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| < 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right)\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{\mathbf{W}T}{3{,}1}\right)^{m+i}\mathbf{M} \qquad (18)$$

для всех $m \geqslant 2$ и любых $k \geqslant 1$. На основании условия b) имеем

$$\left(\frac{\mathbf{W}T}{3{,}1}\right)^m \to 0 \qquad \text{при } m \to \infty \qquad (19)$$

и

$$\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{\mathbf{W}T}{3{,}1}\right)^{m+i} < \left(\frac{\mathbf{W}T}{3{,}1}\right)^m\left(E - \frac{\mathbf{W}T}{3{,}1}\right)^{-1}. \qquad (20)$$

Из (18) — (20) следует равномерная относительно $(t, x_0) \in (-\infty, \infty) \times D - \frac{MT}{2}$ сходимость последовательности (16). С другой стороны, при

$x_0 \in D$ в силу леммы 1 [7]

$$|x_m(t, x_0) - x_0| \leqslant 2\mathbf{M}t\left(1 - \frac{t}{T}\right) \leqslant \frac{\mathbf{M}T}{2},$$

если $x_{m-1}(t, x_0) \in D - \frac{\mathbf{M}T}{2}$, то по индукции заключаем, что для всех $m \geqslant 0$, любых $t \in (-\infty, \infty)$ функции $x_m(t, x_0)$ последовательности (16) существуют, периодичны по t с периодом T и принадлежат множеству D для всех $x_0 \in D - \frac{\mathbf{M}T}{2}$.

Обозначая предельную функцию последовательности (16) через $x_\infty(t, x_0)$ и переходя в равенствах (16) к пределу при $m \to \infty$, убеждаемся, что $x_\infty(t, x_0)$ является периодическим периода T решением уравнения (17), причем

$$|x_\infty(t, x_0) - x_m(t, x_0)| < \left(\frac{\mathbf{W}T}{3,1}\right)^m \left[\left(E - \frac{\mathbf{W}T}{3,1}\right)^{-1} + \frac{\delta_{1m}}{30} E\right] \frac{\mathbf{M}T}{2}.$$

Следовательно, $x_\infty(t, x_0)$, как и $\psi(t)$, является периодическим решением уравнения (17). Таким образом, если уравнение (17) имеет единственное решение, то $\psi(t) = x_\infty(t, x_0)$.

Для завершения доказательства теоремы 1 остается показать единственность решения уравнения (17). Докажем это от противного. Пусть $x(t, x_0)$ и $z(t, x_0)$ — два решения уравнения (17). Тогда для разности имеем

$$|x(t, x_0) - z(t, x_0)| \leqslant \mathbf{W}\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t |x(t, x_0) - z(t, x_0)|\, dt + \frac{t}{T}\int_t^T |x(t, x_0) - z(t, x_0)|\, dt\right].$$

Обозначив $|x(t, x_0) - z(t, x_0)| = r(t)$, $|r(t)|_0 = \max\limits_t |r(t)|$, получаем $r(t) \leqslant \mathbf{W}^m \alpha_m(t) |r(t)|_0$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ или, учитывая оценки для $\alpha_m(t)$ [7], $|r(t)|_0 \leqslant \left(\frac{\mathbf{W}T}{3,1}\right)^m \frac{T}{2} |r(t)|_0$. Переходя в последнем неравенстве к пределу, получаем

$$|r(t)|_0 = 0,$$

что и завершает доказательство теоремы 1.

2. Вопрос существования периодических решений системы (1) можно решать следующим образом. Обозначим через $\Delta(x_0)$ выражение

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T}\int_0^T f\left(t, x_\infty(t, x_0), \int_0^t \varphi(t, s, x_\infty(s, x_0))\, ds\right) dt, \tag{21}$$

где $x_\infty(t, x_0)$ — предел последовательности периодических функций $x_m(t, x_0)$, определяемых соотношениями (16). Так как $x_\infty(t, x_0)$ — решение уравнения

$$x_\infty(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \Bigg\{ f\left(t, x_\infty(t, x_0), \int_0^t [\varphi(t, s, x_\infty(s, x_0)) - \overline{\varphi(t, s, x_\infty(s, x_0))}]\, ds\right) - \overline{f\left(t, x_\infty(t, x_0), \int_0^t [\varphi(t, s, x_\infty(s, x_0)) - \overline{\varphi(t, s, x_\infty(s, x_0))}]\, ds\right)} \Bigg\} dt,$$

то при $\Delta(x_0)=0$ и $\overline{\varphi(t, s, x_\infty(s, x_0))}=0$ $x_\infty(t, x_0)$ является периодическим решением системы (1). Таким образом, существование периодических решений рассматриваемых уравнений связано с существованием нулей функции $\Delta(x_0)$ и выполнением соотношений $\overline{\varphi(t, s, x_\infty(s, x_0))}=0$.

Обозначим через $\Delta^m(x_0)$ выражение

$$\Delta^m(x_0)=\frac{1}{T}\int_0^T f\left(t, x_m(t, x_0), \int_0^t \varphi(t, s, x_m(s, x_0))\, ds\right) dt \qquad (m=0, 1, 2, \ldots), \tag{22}$$

а через $\Phi^m(t, x_0)$ выражение

$$\Phi^m(t, x_0)=\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t, s, x_m(s, x_0))\, ds \qquad (m=0, 1, 2, \ldots). \tag{23}$$

Вопрос о нулях функции $\Delta(x_0)$ будем решать рассматривая нули функций $\Delta^m(x_0)$. Мы приходим, таким образом, к задаче: как, исходя из нулей функции (22), заключить о существовании нулей функции (21). Принимая во внимание, что $\Delta(x_0)$, $\Delta^m(x_0)$ — непрерывные функции для $x_0\in D-\frac{\mathbf{M}T}{2}$, удовлетворяющие неравенству

$$|\Delta(x_0)-\Delta^m(x_0)|\leqslant\frac{1}{T}\int_0^T(\mathrm{K}+\mathbf{LQ}t)\,|x_\infty(t, x_0)-x_m(t, x_0)|\, dt,$$

находим оценку

$$|\Delta(x_0)-\Delta^m(x_0)|<\frac{3{,}1}{3}\left(\frac{\mathbf{W}T}{3{,}1}\right)^{m+1}\left[\left(E-\frac{\mathbf{W}T}{3{,}1}\right)^{-1}+\frac{\delta_{1m}}{30}E\right]\mathbf{M}. \tag{24}$$

Благодаря этой оценке приходим к следующему утверждению, доказываемому аналогично теореме 1 [8].

Теорема 2. *Пусть для T-системы*

$$\frac{dx}{dt}=f\left(t, x, \int_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds\right), \tag{25}$$

заданной в области D пространства E_n, выполняются условия:

1) *для некоторого целого m функция $\Delta^m(x_0)$ имеет изолированную особую точку $\Delta^m(x^0)=0$;*

2) *индекс этой точки отличен от нуля;*

3) *существует замкнутая выпуклая область D_2, принадлежащая $D-\frac{\mathbf{M}T}{2}$ и имеющая x^0 единственной особой точкой, такая, что на ее границе Γ_{D_2} выполняется неравенство*

$$\inf_{x\in\Gamma_{D_2}}\sum_{i=1}^n|\Delta_i^m(x)|\geqslant\frac{3{,}1}{3}\sum_{i=1}^n\left\{\left(\frac{\mathbf{W}T}{3{,}1}\right)^{m+1}\left[\left(E-\frac{\mathbf{W}T}{3{,}1}\right)^{-1}+\frac{\delta_{1m}}{30}E\right]\mathbf{M}\right\}_i; \tag{26}$$

4) *для всех x_0 из области D_2 и всех $m=0, 1, 2, \ldots$ выполняется соотношение $\Phi^m(t, x_0)=0$. Тогда система (25) имеет периодическое решение $x=x(t)$, для которого $x(0)\in D_2$.*

Отыскание точек x_0, через которые при $t = 0$ проходят периодические решения, представляет трудоемкую задачу. Однако в некоторых случаях ее решение становится тривиальным.

Укажем один из таких случаев.

Теорема 3. *Пусть правая часть системы*

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds\right) \tag{27}$$

определена и непрерывна на множестве $-\infty < t,\ s < \infty$; $(x, y) \in D \times D_1$ *и удовлетворяет условиям*:

1) *функции* $f(t, x, y)$, $\varphi(t, s, x)$ *периодичны по* t *и* s *с периодом* T, *удовлетворяют неравенствам* (12);

2) *для любых* $(x, y) \in D \times D_1$ *и всех* $-\infty < t,\ s < \infty$

$$f(t, x, y) = -f(-t, x, y), \quad \varphi(t, s, x) = \varphi(-t, s, x), \quad \varphi(t, s, x) = -\varphi(t, -s, x).$$

Тогда через любую точку $x_0 \in D - \dfrac{\mathbf{M}T}{2}$ *проходит при* $t = 0$ *четное периодическое периода* T *решение* $x = x(t, x_0)$ *системы* (27).

Доказательство. Пусть $x_0 \in D - \dfrac{MT}{2}$. Тогда имеем

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t f\left(t, x_0 \int_0^t \varphi(t, s, x_0)\, ds\right) dt = x_0 + \int_0^t f(t, x_0, \varphi_1(t, t, x_0))\, dt = x_1(t+T),$$

так как $\overline{f\left(t, x_0, \int_0^t \varphi(t, s, x_0)\, ds\right)} = \overline{f(t, x_0, \varphi_1(t, t, x_0))} = 0$ и $\overline{\varphi(t, s, x_0)} = 0$. Более того, $x_1(t) = x_1(-t)$, как интеграл от нечетной функции, и $|x_1(t) - x_0| \leqslant \dfrac{\mathbf{M}T}{2}$ в силу леммы 1 [7].

Функция $f(t, x_1(t), \int_0^t \varphi(t, s, x_1(s))\, ds)$ — нечетная. Действительно, напишем ее в виде

$$f\left(t, x_1(t), \int_0^t \varphi(t, s, x_1(s))\, ds) = f(t, x_1(t), \varphi_2(t, t, x_1(t))\right),$$

где $x_1(t)$, φ_2 — четные функции. Тогда

$$f(-t, x_1(-t), \varphi_2(-t, -t, x_1(-t))) = f(-t, x_1(t), \varphi_2(t, t, x_1(t))) =$$
$$= -f(t, x_1(t), \varphi_2(t, t, x_1(t))).$$

Из периодичности и нечетности $f\left(t, x_1(t), \int_0^t \varphi(t, s, x_1(s))\, ds\right)$ следует, что

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t f\left(t, x_1(t), \int_0^t \varphi(t, s, x_1(s))\, ds\right) dt =$$
$$= x_0 + \int_0^t f(t, x_1(t), \varphi_2(t, t, x_1(t)))\, dt = x_2(t+T),$$

более того, $x_2(t) = x_2(-t)$ и $|x_2(t) - x_0| \leqslant \frac{MT}{2}$.

По индукции легко заключить, что для всех $m \geqslant 1$ функции

$$x_m(t) = x_0 + \int_0^t f\left(t, x_{m-1}(t), \int_0^t \varphi(t, s, x_{m-1}(s))\, ds\right) dt =$$

$$= x_0 + \int_0^t f\left(t, x_{m-1}(t), \varphi_m(t, t, x_{m-1}(t))\right) dt \tag{28}$$

определены для $t \in (-\infty, \infty)$, периодичны по t с периодом T, удовлетворяют соотношению $x_m(t) = x_m(-t)$ и неравенству

$$|x_m(t) - x_0| \leqslant \frac{MT}{2}. \tag{29}$$

Из (29) следует равномерная ограниченность семейства $\{x_m(t)\}$, а из равенства (28) в силу ограниченности $f\left(t, x_{m-1}(t), \int_0^t \varphi(t, s, x_{m-1}(s))\, ds\right)$ следует равностепенная непрерывность этого семейства.

По теореме Арцела заключаем, что из последовательности $\{x_m(t)\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{x_{m_k}(t)\}$:

$$x_{m_k}(t) \underset{k\to\infty}{\rightarrow} x(t). \tag{30}$$

Переходя в соотношении (28) к пределу, убеждаемся, что предельная функция $x(t)$ подпоследовательности (30) является периодическим решением системы (27), причем таким, что $x(0) = x_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. В. Быков, М. Иманалиев, О периодических решениях интегро-дифференциальных уравнений, Сб. Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии, вып. 1, Изд-во АН КиргССР, Фрунзе, 1961.
2. Я. В. Быков, М. Иманалиев, О периодических, почти периодических и ограниченных решениях одного класса интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при производной. Сб. Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии, вып. 2, Изд-во АН КиргССР, Фрунзе, 1962.
3. М. Иманалиев, О периодических решениях нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром, Сб. Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии, вып. 1, АН КиргССР, Фрунзе, 1961.
4. В. Г. Бродовский, О существовании периодических решений интегро-дифференциальных уравнений, Вестник АН КазССР, № 9, 1966.
5. В. П. Мисник, О периодических и почти периодических решениях интегро-дифференциальных уравнений, Сб. Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии, вып. 2, АН КиргССР, Фрунзе, 1962.
6. Г. Вахабов, О периодических решениях нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений, Труды семинара по математической физике и нелинейным колебаниям, т. 1, вып. 2, «Наукова думка», К., 1968.
7. А. М. Самойленко, Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I, УМЖ, т. 17, № 4, 1965.
8. А. М. Самойленко, Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений, II, УМЖ, т. 18, № 2, 1966.

Поступила 1.VII 1968 г.,
после переработки — 2.IV 1969 г.

Институт математики
АН УССР