УДК 517.51+517.531

Асимптотические теоремы единственности для некоторых классов бесконечно дифференцируемых функций

Е. С. Дехтярюк, Б. И. Коренблюм

В в е д е н и е. Пусть $\{M_n\}$ — неубывающая последовательность положительных чисел. Через $C\{M_n\}$ обозначим класс бесконечно дифференцируемых функций на $(-\infty, \infty)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|f^{(n)}(t)| \leqslant M_n \qquad (n \geqslant 0, -\infty < t < \infty). \tag{1}$$

Пусть далее $L(r)$ неотрицательная функция на $[0, \infty)$ такая, что $\frac{L(r)}{r} \to \infty$ при $r \to \infty$. В этой статье рассматривается вопрос: каким условиям должны быть подчинены последовательность $\{M_n\}$ и функция $L(r)$, чтобы всякая функция класса $C\{M_n\}$, удовлетворяющая условию

$$|f(t+t_0)| \leqslant M_0 e^{-L(t)} \qquad (t > 0), \tag{2}$$

где $t_0 > 0$ зависит от f, была тождественно равна нулю.

Естественно считать, что класс $C\{M_n\}$ — квазианалитичен, так как в противном случае в этом классе найдется нетривиальная функция, удовлетворяющая (2), даже, если $L(r) = \infty$ при r большем некоторого r_0.

Подмножество функций из $C\{M_n\}$, удовлетворяющих (2), обозначим через $C(\{M_n\}, L)$. Подобные классы функций весьма полезны в некоторых вопросах общей теории дифференциальных уравнений.

В работах [1—3] изучался вопрос о нетривиальности класса $S(\{M_0\}, L)$, который состоит из функций, удовлетворяющих неравенствам

$$|f^{(n)}(t)| \leqslant Ak^n e^{-L(|at|)} \qquad (n \geqslant 0),$$

где A, k, a зависят только от f.

Как видно из определений, класс $C(\{M_n\}, L)$ отличается от $S(\{M_n\}, L)$, в частности, тем, что в последнем функции убывают вместе со своими производными при $|t| \to \infty$.

В работе [1] были получены условия тривиальности классов $S(\{M_n\}, L)$ В работе [2] доказано обратное утверждение, т. е., что нарушение этих условий влечет нетривиальность классов.

Ниже будет показано, что если $\{M_n\}$ растут не слишком быстро, а $\exp\{-L(t)\}$ достаточно быстро убывает, то аналогичные результаты могут быть получены и для классов $C(\{M_n\}, L)$.

1. О б о д н о м к л а с с е ф у н к ц и й, а н а л и т и ч е с к и х в в е р х н е й п о л у п л о с к о с т и.

Т е о р е м а 1. *Пусть аналитическая функция $F(z)$, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и непрерывная вплоть до ее границы, удовлетворяет условиям*

$$\varlimsup_{|z|\to\infty} \frac{\ln|F(z)|}{|z|^2} \leqslant 0, \tag{3}$$

$$|F(x)| \leqslant e^{-m(|x|)} \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{4}$$

где $m(x)[0, \infty)$ — неотрицательная неубывающая непрерывная функция, такая, что

$$\int_1^\infty \frac{m(u)}{u^3}\, du < \infty. \tag{5}$$

Если

$$\lim_{y\to\infty}\left\{\frac{\ln|F(iy)|}{y}-\frac{2y^2}{\pi}\int_0^\infty\frac{m(u)}{u^2+1}\frac{du}{u^2+y^2}\right\}=-\infty, \tag{6}$$

то $F(z)\equiv 0$.

Доказательство. Построим в верхней полуплоскости аналитическую функцию

$$F_1(z)=e^{h(z)}, \tag{7}$$

где

$$h(z)=u_1(z)+iv_1(z)=\frac{z^2+1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m(|u|)}{u^2+1}\frac{du}{u-z}. \tag{8}$$

Функция

$$u_1(z)=\frac{-x^2-y^2+1}{\pi}y\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m(|u|)}{u^2+1}\frac{du}{(u-x)^2+y^2}+$$

$$+\frac{2xy}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m(|u|)u}{u^2+1}\frac{du}{(u-x)^2+y^2} \tag{9}$$

гармоническая в верхней полуплоскости. По теореме Фату для всех x

$$\lim_{y\to 0}u_1(x+iy)=m(|x|). \tag{10}$$

В силу (9)

$$u_1(z)\leqslant\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m(|u|)}{u^2+1}\frac{du}{(u-x)^2+y^2}+\frac{2|x|y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m(|u|)|u|}{u^2+1}\frac{du}{(u-x)^2+y^2}. \tag{11}$$

Покажем, что в области D_δ, определяемой неравенством $\delta\leqslant\arg z\leqslant\pi-\delta$, $\delta>0$,

$$\varlimsup_{|z|\to\infty}\frac{u_1(z)}{|z|^2}\leqslant 0. \tag{12}$$

Из (11) следует, что для $|z|\geqslant 1$ в области D_δ

$$\frac{u_1(z)}{|z|^2}\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m(|u|)(1+|u|)}{u^2+1}\frac{du}{(u-x)^2+y^2}.$$

Докажем, что в этой области

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m(|u|)(1+|u|)}{u^2+1}\frac{du}{(u-x)^2+y^2}=0. \tag{13}$$

Разобьем интеграл на два слагаемых

$$\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A}\frac{m(|u|)(1+|u|)}{u^2+1}\frac{du}{(u-x)^2+y^2}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|u|>A}\frac{m(|u|)(1+|u|)}{u^2+1}\,\frac{du}{(u-x)^2+y^2}=I_1+I_2.$$

Легко показать, что при любом вещественном u

$$\frac{u^2+1}{(u-x)^2+y^2}\leqslant\frac{x^2+y^2+1}{y^2}. \tag{14}$$

Отсюда следует

$$I_2\leqslant\frac{x^2+y^2+1}{y^2}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{|u|>A}\frac{m(|u|)(1+|u|)}{(u^2+1)^2}\,du.$$

В области D_δ', определяемой неравенствами $|z|\geqslant 1$, $\delta\leqslant\arg z\leqslant\pi-\delta$, $\delta>0$,

$$\sup_{D_\delta'}\frac{x^2+y^2+1}{y^2}<\infty;$$

и при любом $\varepsilon>0$ можно взять столь большое A, чтобы в области D_δ' было $I_2<\varepsilon$. При фиксированном A интеграл I_1 стремится к нулю равномерно по $\arg z$, когда $|z|\to\infty$.

Легко показать, что при $|u-x|\geqslant 1$, $-\infty<x<\infty$

$$\frac{u^2+1}{(u-x)^2+y^2}\leqslant 2x^2+3. \tag{15}$$

В силу (11) и (15)

$$u_1(z)\leqslant\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x-1}\frac{m(|u|)}{u^2+1}\,\frac{du}{(u-x)^2+y^2}+\frac{y}{\pi}\int\limits_{x-1}^{x+1}\frac{m(|u|)}{u^2+1}\,\frac{du}{(u-x)^2+y^2}+$$

$$+\frac{y}{\pi}\int\limits_{x+1}^{\infty}\frac{m(|u|)}{u^2+1}\,\frac{du}{(u-x)^2+y^2}+2|x|\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x-1}\frac{m(|u|)|u|}{u^2+1}\,\frac{du}{(u-x)^2+y^2}+$$

$$+2|x|\frac{y}{\pi}\int\limits_{x-1}^{x+1}\frac{m(|u|)|u|}{u^2+1}\,\frac{du}{(u-x)^2+y^2}+$$

$$+2|x|\,\frac{y}{\pi}\int\limits_{x+1}^{\infty}\frac{m(|u|)|u|}{u^2+1}\,\frac{du}{(u-x)^2+y^2}\leqslant(2x^2+3)\,yA_1+$$

$$+2|x|(2x^2+3)\,yA_2+m(|x|+1)+\sqrt{2}\,|x|\,m(|x|+1),$$

где

$$A_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{m(|u|)}{(u^2+1)^2}\,du,\qquad A_2=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{m(|u|)|u|}{(u^2+1)^2}\,du.$$

Получаем, что в полосе $0\leqslant y\leqslant 1$

$$u_1(x+iy)\leqslant C_1|x|^3+\sqrt{2}\,(|x|+1)\,m(|x|+1)+C_2 \tag{16}$$

при некоторых C_1 и C_2, больших нуля.

Рассмотрим в верхней полуплоскости функцию $P(z)=F(z)F_1(z)$.

Из (3), (16) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $C_3 > 0$, что в полосе $0 \leqslant y \leqslant 1$

$$\ln|P(z)| \leqslant \varepsilon(x^2+1) + C_1|x|^3 + \sqrt{2}(1+|x|)\,m(1+|x|) + C_3. \qquad (17)$$

Используя (3), (11) и (14), получаем, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $C_4 > 0$, что

$$\ln|P(z)| \leqslant \varepsilon_1|z|^2 + \frac{x^2+y^2+1}{y\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m(|u|)}{(u^2+1)^2}\,du +$$

$$+ 2|x|\frac{x^2+y^2+1}{y}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m(|u|)|u|}{(u^2+1)^2}\,du + C_4. \qquad (18)$$

При $y = 1$ $\ln|P(x+i)| \leqslant C_5|x|^3 + C_6$, в силу (4) и (10)

$$\ln|P(x)| \leqslant 0. \qquad (19)$$

Следовательно, модуль функции $T(z) = P(z)\,e^{-z^4}$ ограничен при $y = 0$ и $y = 1$, т. е.

$$|T(x)| \leqslant B, \quad |T(x+i)| \leqslant B. \qquad (20)$$

Используя (17), получаем, что в полосе $0 \leqslant y \leqslant 1$

$$\ln|T(z)| \leqslant \varepsilon(x^2+1) + C_1|x|^3 + \sqrt{2}(1+|x|)\,m(1+|x|) - x^4 + C_7. \qquad (21)$$

Введем функцию

$$\mu(x) = \sup_{0\leqslant y\leqslant 1}|T(x+iy)|.$$

В силу условия (5)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{m(x)}{x^2} = 0.$$

Отсюда, используя (21), получаем, что

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}}\frac{\ln\mu(x)}{|x|^3} \leqslant 0. \qquad (22)$$

В силу принципа Фрагмена — Линделефа из (20) и (22) $|T(z)| < B$ при $0 \leqslant y \leqslant 1$. Следовательно, в рассматриваемой полосе

$$|P(z)| \leqslant B|e^{z^4}|. \qquad (23)$$

Пользуясь (18), в области, определяемой неравенствами $y \leqslant \frac{|x|}{\sqrt{3}}$, $y \geqslant 1$, можно написать

$$\ln|P(z)| \leqslant \varepsilon_1|z|^2 + x^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)A_1 + 2|x|^3\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)A_2 +$$

$$+ 2A_2|x| + C_4 + A_1 \leqslant B_1|z|^3 + B_2. \qquad (24)$$

В силу (23) и (24) для области D_δ'', определяемой неравенствами $y \leqslant \frac{|x|}{\sqrt{3}}$, $y > 0$, можно записать

$$|P(z)| \leqslant B_3|e^{z^4}|. \qquad (25)$$

Итак, для функции $P(z)$ в силу (3), (12) и (25) имеем в области $\left\{z : y \geqslant \frac{|x|}{\sqrt{3}}\right\}$

$$\varlimsup_{|z|\to\infty} \frac{\ln |P(z)|}{|z|^2} \leqslant 0, \tag{26}$$

в области $\left\{z : y \leqslant \frac{|x|}{\sqrt{3}},\ y > 0\right\}$

$$|P(z)| \leqslant B_3 |e^{z^4}|. \tag{27}$$

На мнимой оси

$$\frac{\ln |P(iy)|}{y} = \frac{\ln |F(iy)|}{y} - \frac{y^2 - 1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m(|u|)}{u^2 + 1} \frac{du}{u^2 + y^2}. \tag{28}$$

В силу условия (6) следует, что

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\ln |P(iy)|}{y} = -\infty. \tag{29}$$

Возьмем некоторое число $A > 0$ и рассмотрим вспомогательную функцию $P_A(z) = P(z) e^{-Aiz}$. Из (29) следует, что

$$|P_A(iy)| \leqslant M_A, \tag{30}$$

где M_A некоторая постоянная, которая зависит от A. Считаем, что $M_A > 1$. В силу (19)

$$|P_A(x)| \leqslant 1. \tag{31}$$

Из (26) и (27) следует, что в области $\left\{z : y \geqslant \frac{|x|}{\sqrt{3}}\right\}$

$$\varlimsup_{|z|\to\infty} \frac{\ln |P_A(z)|}{|z|^2} \leqslant 0, \tag{32}$$

а в области $\left\{z : y \leqslant \frac{|x|}{\sqrt{3}},\ y \geqslant 0\right\}$

$$|P_A(z)| \leqslant B_A |e^{z^4}|. \tag{33}$$

Образуем еще одну вспомогательную функцию $T_{1\varepsilon}(z) = P_A(z) e^{\varepsilon i z^2}$ и рассмотрим ее в области $\{z : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$. Используя (30) — (33), получаем, что

$$|T_{1\varepsilon}(x)| \leqslant 1, \tag{34}$$

$$|T_{1\varepsilon}(iy)| \leqslant M_A, \tag{35}$$

$$\varlimsup_{|z|\to\infty} \frac{\ln |T_{1\varepsilon}(z)|}{|z|^2} \leqslant 0, \qquad \left\{z : y \geqslant \frac{x}{\sqrt{3}},\ x > 0\right\}, \tag{36}$$

$$|T_{1\varepsilon}(z)| \leqslant B_A |e^{z^4}|, \qquad \left\{z : y \leqslant \frac{x}{\sqrt{3}},\ y \geqslant 0\right\}. \tag{37}$$

В силу (32)

$$|T_{1\varepsilon}(z)| \leqslant M_\varepsilon, \qquad \left\{z : y = \frac{x}{\sqrt{3}},\ x \geqslant 0\right\}, \tag{38}$$

где M_ε постоянная, которая зависит от ε (считаем, что $M_\varepsilon > M_A$). Из (34), (37) и (38), согласно принципу Фрагмена — Линделефа, получаем, что в области $\left\{z : y \leqslant \frac{x}{\sqrt{3}},\ y \geqslant 0\right\}$

$$|T_{1\varepsilon}(z)| \leqslant M_\varepsilon. \tag{39}$$

Аналогично из соотношений (35), (36) и (38) следует, что и в области $\left\{z : y \geqslant \frac{x}{\sqrt{3}},\ x \geqslant 0\right\}$ выполняется (39). Итак, в области $\{z : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$

$$|T_{1\varepsilon}(iy)| \leqslant M_A, \quad |T_{1\varepsilon}(x)| \leqslant 1, \quad |T_{1\varepsilon}(z)| \leqslant M_\varepsilon.$$

Следовательно, в этой области $|P_A(z)| \leqslant M_A e^{2\varepsilon xy}$. Поскольку $P_A(z)$ не зависит от ε, получаем $|P_A(z)| \leqslant M_A$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$. Воспользовавшись вспомогательной функцией $T_{2\varepsilon}(z) = P_A(z)\, e^{-\varepsilon i z^2}$, можно получить, что $P_A(z)| \leqslant M_A$ $(x \leqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

Модуль аналитической функции $P_A(z)$ ограничен в верхней полуплоскости и в силу (31) $|P_A(z)| \leqslant 1$ при $y \geqslant 0$. Следовательно, в верхней полуплоскости $|P(z)| \leqslant e^{-Ay}$. Поскольку $P(z)$ не зависит от A, то, устремив A к $+\infty$, получим $P(z) \equiv 0$.

Так как $F(z) = P(z)\, e^{-h(z)}$, то $F(z) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

2. Условие тривиальности класса $C(\{M_n\}, L)$. Пусть $L(r)$ неотрицательная функция на $[0, \infty)$ и $\frac{L(r)}{r} \to \infty$ при $r \to \infty$, а функция $\widetilde{L}(\xi) = \max\limits_{r>0}(r\xi - L(r))$ двойственна по Юнгу с $L(r)$.

Введем функцию $k(t) = \min\left\{M_0, \frac{M_1}{|t|}, \frac{M_2}{|t|^2}, \ldots\right\}$. Она непрерывно и монотонно стремится к нулю при $|t| \to \infty$. Можно считать, что $k(t) < 1$.

Теорема 2. *Пусть $L(r)$ растет так быстро, что двойственная ей по Юнгу функция*

$$\widetilde{L}(\xi) = o(\xi^2) \quad (\xi \to \infty) \tag{40}$$

и постоянные M_n таковы, что

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln k(u)}{u^3}\, du > -\infty. \tag{41}$$

Если найдется такое $\varepsilon > 0$, что

$$\lim_{y\to\infty}\left\{\frac{\widetilde{L}[(1+\varepsilon)y]}{y} + \frac{2y^2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\ln k(u)}{u^2+1}\,\frac{du}{u^2+y^2}\right\} = -\infty, \tag{42}$$

то класс $C(\{M_n\}, L)$ тривиален.

Доказательство. Рассмотрим вначале вспомогательную функцию $\varphi_a(t) = \frac{\sin^2 at}{t^2}$. Эту функцию можно представить в виде

$$\varphi_a(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{-2a}^{2a}\left(a - \frac{|\sigma|}{2}\right) e^{i\sigma t}\, d\sigma.$$

Поэтому

$$\varphi_a^{(n)}(t) = \frac{1}{2}\int_{-2a}^{2a} (i\sigma)^n \left(a - \frac{|\sigma|}{2}\right) e^{i\sigma t} d\sigma \qquad (n \geqslant 0). \tag{43}$$

Интегрируя два раза по частям, получим

$$\varphi_a^{(n)}(t) = -\frac{i^n}{4t^2}(2a)^n [e^{i2at} + (-1)^n e^{i2at}] - \frac{an(n-1)\, i^n}{2t^2}\int_{-2a}^{2a} \sigma^{n-2} e^{i\sigma t} d\sigma -$$

$$-\frac{i^n (n+1)\, n}{4t^2}\int_{-2a}^{0} \sigma^{n-1} e^{i\sigma t} d\sigma + \frac{i^n (n+1)\, n}{4t^2}\int_{0}^{2a} \sigma^{n-1} e^{i\sigma t} d\sigma.$$

Следовательно,

$$|\varphi_a^{(n)}(t)| \leqslant \frac{1}{4t^2}(2a)^n\, 2 + \frac{an(n-1)}{t^2}\int_0^{2a} \sigma^{n-2} d\sigma + \frac{n(n+1)}{2t^2}\int_0^{2a} \sigma^{n-1} d\sigma =$$

$$= \frac{(2a)^n}{t^2}(n+1). \tag{44}$$

В силу (43)

$$|\varphi_a^{(n)}(t)| \leqslant \frac{(2a)^{n+2}}{2(n+1)(n+2)}. \tag{45}$$

Из (44), (45) следует, что при $a_1 = \frac{\varepsilon}{8}$ $(\varepsilon > 0)$

$$|\varphi_{a_1}^{(n)}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon^n}{1+t^2} \quad (n \geqslant 0). \tag{46}$$

Введем функцию $f_1(t) = f(t)\,\varphi_{a_1}(t)$, где $f(t) \in C(\{M_n\}, L)$. Получаем, что

$$|f_1^{(n)}(t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2}(M_n + C_n^1 M_{n-1}\varepsilon + C_n^2 M_{n-2}\varepsilon^2 + \ldots + M_0 \varepsilon^n).$$

Так как по предложению M_n возрастают монотонно, то

$$|f_1^{(n)}(t)| \leqslant \frac{M_n}{1+t^2}(1+\varepsilon)^n. \tag{47}$$

Следовательно, функция $f_2(t) = \frac{1}{\pi} = f_1\left(\frac{t}{1+\varepsilon}\right)$ удовлетворяет в силу (2) и (47) неравенствам

$$|f_2^{(n)}(t)| \leqslant \frac{M_n}{\pi}\frac{1}{1+t^2} \quad (n \geqslant 0, -\infty < t < \infty), \tag{48}$$

и

$$|f_2[t + (1+\varepsilon)t_0]| \leqslant \frac{M_0}{\pi(1+t^2)} e^{-L\left(\frac{t}{1+\varepsilon}\right)} \qquad (t > 0). \tag{49}$$

В силу (49) преобразования Фурье функции $f_2(t)$

$$F(x+iy) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\, e^{-i(x+iy)t} dt$$

является аналитической функцией верхней полуплоскости. Так как $f_2(t)$ и все ее производные стремятся к нулю при $|t| \to \infty$, интегрируя по частям несколько раз, получим

$$|F(x)| \leqslant \frac{\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2^{(n)}(t)\, e^{-ixt} dt \right|}{|x|^n} \leqslant \frac{M_n}{|x|^n}.$$

Следовательно,

$$|F(x)| \leqslant k(x). \tag{50}$$

Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(t + t_0)\, e^{-i(x+iy)t}\, dt = e^{i(x+iy)t_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\, e^{-i(x+iy)t}\, dt,$$

то в силу (48) и (49)

$$|F(z)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\, e^{-i(x+iy)t} dt \right| \leqslant e^{(1+\varepsilon)yt_0} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2[t + (1+\varepsilon)\, t_0] e^{-i(x+iy)t}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2e^{(1+\varepsilon)yt_0} M_0 [1 + e^{\widetilde{L}[(1+\varepsilon)y]}] \leqslant Ae^{\widetilde{L}[(1+\varepsilon)y]+(1+\varepsilon)yt_0}, \tag{51}$$

где A — некоторая положительная константа.

Отсюда в силу (40)

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\ln |F(z)|}{|z|^2} \leqslant 0. \tag{52}$$

Из (42) и (51) выводим:

$$\lim_{y\to\infty} \left\{ \frac{\ln |F(iy)|}{y} + \frac{2y^2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\ln k(u)}{u^2+1} \frac{du}{u^2+y^2} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{y\to\infty} \left\{ (1+\varepsilon)\, t_0 + \frac{\widetilde{L}[(1+\varepsilon)\, y]}{y} + \frac{2y^2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\ln k(u)}{u^2+1} \frac{du}{u^2+y^2} \right\} = -\infty. \tag{53}$$

В силу (41), (50), (52) и (53) на основании теоремы 1 можно утверждать, что $F(z) \equiv 0$. В силу теоремы единственности из теории интеграла Фурье $f(t) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

3. Условие нетривиальности класса $C(\{M_n\}, L)$. Докажем теперь утверждение, в некотором смысле обратное теореме 2.

Теорема 3. *Пусть постоянные M_n таковы, что*

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln k(u)}{u^3}\, du > -\infty.$$

Если

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}} \left\{ \frac{\widetilde{L}(y)}{y} + \frac{2y^2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\ln k(u)}{u^2+1} \frac{du}{u^2+y^2} \right\} = A > -\infty, \tag{54}$$

то класс $C(\{M_n\}, L)$ — не пуст.

Доказательство. Построим в верхней полуплоскости аналитическую функцию

$$F(z) = e^{h_1(z) - iA_1 z + h_2(z)}, \tag{55}$$

где

$$h_1(z) = u_1(z) + iv_1(z) = \frac{z^2+1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln k(u)}{u^2+1} \frac{du}{u-z},$$

$$h_2(z) = u_2(z) + iv_2(z) = \frac{z^2+1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\ln(1+u^2)}{u^2+1} \frac{du}{u-z},$$

A_1 — некоторая константа, которая будет определена ниже.

Покажем, что

$$u_1(z) \leqslant u_1(iy). \tag{56}$$

В самом деле

$$\frac{\partial}{\partial x} u_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln k(u)}{u^2+1} \; \frac{x^2+y^2-1-2xu}{(u-x)^2+y^2}\, du\right] =$$

$$= \frac{2y}{\pi} \int_{0}^{\infty} [\ln k(u+x) - \ln k(u-x)] \; \frac{u}{[u^2+y^2]^2}\, du.$$

Учитывая, что $\ln k(u)$ монотонно убывает, получаем $\frac{\partial u_1}{\partial x} > 0$ при $x < 0$ и $\frac{\partial u_1}{\partial x} < 0$ при $x > 0$, что и доказывает (56).

Пользуясь теоремой Фату, легко показать, что для всех x

$$\lim_{y\to 0} \ln |F(x+iy)| = \ln k(x) - \ln(1+x^2). \tag{57}$$

Оценим скорость убывания $|F(x+iy)|$ при $|x| \to \infty$

$$\ln |F(x+iy)| = u_1(z) + A_1 y + \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1+u^2)}{1+u_2} \, \frac{x^2+y^2-1-2xu}{(u-x)^2+y^2}\, du =$$

$$= u_1(z) + A_1 y + 2\ln 2 \cdot y - \ln(y^2+y+1+x^2).$$

Следовательно, в силу (56)

$$\ln |F(x+iy)| \leqslant u_1(iy) + A_1 y + 2\ln 2\cdot y - \ln(1+x^2).$$

Выберем A_1 так, чтобы $A > A_1 + 2\ln 2$, тогда

$$\lim_{y\to\infty} \left\{ \frac{\ln |F(x+iy)|}{y} + \frac{2y^2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\ln k(u)}{u^2+1} \, \frac{du}{u^2+y^2} \right\} \leqslant A_1 + 2\ln 2 < A,$$

и в силу условия (54) найдется такое большое y_0, что при $y > y_0$

$$\ln |F(x+iy)| \leqslant \widetilde{L}(y) - \ln(1+x^2). \tag{58}$$

Рассмотрим преобразование Фурье функции $F(x)$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ixt}\, dx. \tag{59}$$

Далее

$$f^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^n F(x)\, e^{ixt} dx.$$

Отсюда, учитывая (57),

$$|f^{(n)}(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |x|^n k(x) \frac{1}{1+x^2} dx \leqslant \pi M_n. \tag{60}$$

В выражении (59), используя теорему Коши, можно путь интегрирования заменить любой горизонтальной прямой, не меняя результата

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x+iy)\, e^{i(x+iy)t} dx.$$

Учитывая (58), для $y > y_0$

$$|f(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} e^{\widetilde{L}(y)-ty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi e^{-ty+\widetilde{L}(y)},$$

обозначим через t_0 то значение t, при котором y_0 обращает неравенство Юнга в равенство

$$-t_0 y_0 + \widetilde{L}(y_0) = -L(t_0).$$

Тогда для $t > t_0$

$$|f(t)| \leqslant \pi e^{-L(t)}. \tag{61}$$

В силу (60) и (61) функция $f_1(t) = \frac{1}{\pi} f(t)$ принадлежит классу $C(\{M_n\}, L)$, что и доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, Теорема единственности для преобразований Фурье и для бесконечно дифференцируемых функций, Изв. АН АрмССР, т. 6, № 10, 1957.
2. К. И. Бабенко, О некоторых классах пространств бесконечно дифференцируемых функций, ДАН СССР, т. 132, № 6, 1960.
3. С. Мандельбройт, Теоремы замкнутости и теоремы композиции, ИЛ, М., 1962.

Поступила 10.VI 1968 г.

Киевский инженерно-строительный институт