УДК 917.547

О построении приближенных решений счетных систем и их устойчивости

А. А. Мартынюк, А. А. Сукенник

Целью данной заметки является построение решений счетных систем дифференциальных уравнений и исследование устойчивости приближенных решений, полученных в виде конечных отрезков степенных рядов. Решение задачи осуществляется путем использования степенных рядов [1] и некоторых результатов теории устойчивости [2]. Доказательство сходимости полученных решений базируется на элементарных сведениях из теории нормированных колец [3] и на методе, последовательных приближений.

1. Пусть имеется счетная система дифференциальных уравнений, записанная в матричной форме

$$\frac{dy}{dt} = P(t)\,y + F(t)\,y, \quad y(0) = y_0, \tag{1.1}$$

где $y(t)$ — искомая функция $P(t)$ и $F(t)$ — заданные бесконечные матрицы с элементами непрерывными на компактном интервале $I \in R$, $R = [0 \leqslant \leqslant t < \infty)$.

Пусть далее σ — множество бесконечных матриц $\widehat{P}$. Рассмотрим действительные числа p, $q \left(1 \leqslant p \leqslant \infty \text{ и } q = \dfrac{p}{p-1} \right)$. Очевидно, $q > 1$ и

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. В σ-множестве матриц $\widehat{P}$, согласно результатам работы [4], заменив интегралы суммами, введем норму

$$\| \widehat{P} \|_{\text{int}} = \left[\sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} | p_{si} |^q \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{1.2}$$

Здесь (int) указывает на то, что внутреннее суммирование в формуле (1.2) производится по строкам. Из множества $\widehat{P}$ всех бесконечных матриц выделим подмножество P, для которых $\| P_{\text{int}} \| < \infty$ и имеющих вид $P = \alpha E + \widehat{P}$, где α — произвольное комплексное число, E — единичная матрица.

Согласно (1.2) и [3, стр. 211] введем нормы

$$\begin{gathered} \| P \|_{\text{int}} = |\alpha| + \| \widehat{P} \|_{\text{int}}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \\ \| P \|_{\text{int}} = \| \widehat{P} \|_{\text{int}}, \quad p = \infty. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Так полученное подмножество будем обозначать Λ_N^p. Нетрудно убедиться, что для любого p ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) множество Λ_N^p будет полным нормированным кольцом [5].

Пусть $P(t)$ — бесконечная матрица-функция, определенная на компактном интервале I из R и принимающая значения в Λ_N^p.

Если Λ_N^p (I) — множество всех матриц-функций $P(t)$ со значениями в Λ_N^p, аналитических на I, то Λ_N^p (I) — аналитическое продолжение кольца Λ_N^p на I и Λ_N^p (I) — полное нормированное кольцо.

Обратимся вновь к системе (1.1). Методом последовательных приближений установим справедливость следующего утверждения [5].

Теорема 1. *Пусть* $P(t)$ *и* $F(t)$ *принимают значения в* Λ_N^p (I), $y_0 \in \Lambda_N^p$; *тогда решение* $y(t)$ *задачи* (1.1) *принимает значение из полного нормированного кольца* Λ_N^p (I).

Задачу (1.1) представим в форме

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}(t)\, y_j + \sum_{j=1}^{\infty} F_{ij}(t)\, y_j, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{1.1'}$$

$$y_i(t)|_{t=0} = y_i^0, \tag{1.4}$$

где P_{ij} и F_{ij} — элементы матриц $P(t)$ и $F(t)$ соответственно.

Теорема 2. *Если счетная система* (1.1) *такова, что* $P_{ij}(t)$ *и* $F_{ij}(t)$ *разлагаются в степенные ряды*

$$P_{ij}(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{ij\nu} t^{\nu}, \quad F_{ij}(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{ij\nu} t^{\nu}, \tag{1.5}$$

сходящиеся по норме (1.2) *при всех* $t \in \text{I}$, *то для любого набора* $y_i^0 \in \Lambda_N^p$ *задача* (1.1) *имеет единственное решение*

$$y_i(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{i\nu} t^{\nu}, \quad a_{i\nu} \in \Lambda_N^p, \tag{1.6}$$

где $a_{i\nu}$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$a_{i\nu+1} = \frac{1}{\nu+1}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}([p_{ij\nu}a_{j\nu}] + [f_{ij\nu}a_{j\nu}])\right\}, \tag{1.7}$$

$[p_{ij\nu}a_{j\nu}]$ и $[f_{ij\nu}a_{j\nu}]$ — произведения, определяемые формулой Коши.

Доказательство. Подставляя (1.6) в (1.1′) и выполняя несложные преобразования, получаем формулу (1.7) для определения $a_{i\nu}$. Коэффициенты a_{i0} определяются из начальных условий (1.4).

Заметим, что так как $p_{ij\nu}$ и $f_{ij\nu}$ принадлежат кольцу Λ_N^p, то, согласно условиям теоремы 2, сходимость по норме (1.3) степенных рядов (1.6) на компактном интервале I гарантирована. Отсюда также вытекает, что решение задачи (1.1′) — (1.4) при допущениях теоремы 2 представляется в виде

$$y_i(t) = a_{i0} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{i\nu}t^{\nu}$$

и сходимость ряда $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{i\nu}t^{\nu}$ по норме (1.3) на I обеспечена.

Доказательство закончим установлением того факта, что $a_{i\nu} \in \Lambda_N^p(\mathrm{I})$. Это следует из свойства полного нормированного кольца $\Lambda_N^p(\mathrm{I})$, которое, как нетрудно убедиться, является двусторонним идеалом [3, стр. 191] в кольце Λ_N^p. Так как $p_{ij\nu}$ и $f_{ij\nu} \in \Lambda_N^p(\mathrm{I})$, то и $[p_{ij\nu}a_{j\nu}]$ и $[f_{ij\nu}a_{j\nu}] \in \Lambda_N^p(\mathrm{I})$. Следовательно, при любом $\nu \geqslant 0$ находим, что $a_{i\nu+1} \in \Lambda_N^p(\mathrm{I})$.

Этим доказательство закончено.

2. Пусть имеется счетная система

$$\frac{du_s}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{sj}(t)\,u_j + f_s(t), \quad s = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2.1}$$

где $p_{sj}(t)$ и $f_s(t)$ — заданные функции на I,

$$u_s(t)\,|_{t=0} = u_s^0, \quad s = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2.2}$$

$u_s(t)$ — искомая функция.

Рассмотрим полное линейное пространство l^p числовых последовательностей $(\omega_1, \omega_2, \ldots)$ с нормой

$$\|\omega\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\omega_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{2.3}$$

При этом, как известно [2], пространство l^p является банаховым. Обозначим $l^p(\mathrm{I})$ пространство функций $u_s(t)$, аналитических при всех t из компактного интервала I.

Теорема 3. *Если $p_{sj}(t)$ и $f_s(t) \in l^p(\mathrm{I})$ и $u_s^0 \in l^p$, то существует единственное решение задачи* (2.1), (2.2), *входящее в* $l^p(\mathrm{I})$.

Доказательство теоремы укладывается в схему доказательства теоремы 1.

Теорема 4. *Если система* (2.1) *такова, что*

$$p_{sj}(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} N_{sj\nu}t^{\nu} \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

$$f_s(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_{s\nu} t^{\nu} \quad (s = 1, 2, \ldots),$$

где $p_{sj}(t)$ *и* $f_s(t)$ *абсолютно сходятся по норме* (2.3) *для любого* $t \in \mathrm{I}$, *то для любого набора начальных значений* $u_s^0 \in l^p$ *задача* (2.1), (2.2) *имеет единственное решение*

$$u_s(t) = a_{s0} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{s\nu} t^{\nu},$$

где

$$a_{s\nu+1} = \frac{1}{\nu+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [N_{sk\nu} a_{k\nu}] + Q_{s\nu} \right\}$$

и

$$[N_{sk\nu} a_{k\nu}] = N_{sk0} a_{k\nu} + N_{sk1} a_{k\nu-1} + \ldots + N_{sk\nu} a_{k0}.$$

Доказательство теоремы выполняется аналогично доказательству теоремы 2.

Далее рассмотрим счетную последовательность функций

$$\psi_1(t),\ \psi_2(t), \ldots, \psi_s(t), \ldots, \tag{2.4}$$

где

$$\psi_s(t) = \sum_{\nu=0}^{m} a_{s\nu} t^{\nu}. \tag{2.5}$$

Назовем последовательность (2.4) приближенным решением задачи (2.1), (2.2). На основании теоремы 4 точное решение задачи (2.1), (2.2) с учетом (2.4) может быть представлено в виде [6]

$$u_s(t) = \psi_s(t) + \omega_s(t), \tag{2.6}$$

где $\omega_s(t)$ — некоторые функции, принадлежащие $l^p(\mathrm{I})$ как часть $u_s(t)$ и имеющие непрерывную производную.

Подставляя (2.6) в (2.1), найдем

$$\frac{d\omega_s}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{sj}(t)\, \omega_j + Z_s(\psi, \dot{\psi}, f, t) \quad (s = 1, 2, 3, \ldots), \tag{2.7}$$

где

$$Z_s(\psi, \dot{\psi}, f, t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{sj}(t)\, \psi_j(t) - \frac{d\psi_s}{dt} + f_s(t). \tag{2.8}$$

Очевидно, функции $Z_s(\psi, \dot{\psi}, f, t) \in l^p(\mathrm{I})$.

Воспользуемся матричной формой записи

$$\dot{\omega} = P(t)\, \omega + Z(\psi, \dot{\psi}, f, t) \tag{2.7'}$$

и будем рассматривать (2.7′) как операторное уравнение в банаховом пространстве l^p с нормой (2.3).

Введем такое определение.

О п р е д е л е н и е 1. Приближенное решение $\psi(t)$ будем называть W-устойчивым, если при заданных оценках величин W и δ ($\delta \leqslant W$) имеет место неравенство

$$\| u(t) - \psi(t) \| < W, \quad \forall t \in \mathrm{I}, \tag{2.9}$$

лишь только

$$\| u(0) - \psi(0) \| < \delta.$$

З а м е ч а н и е 1. Пусть $\psi_s(t)$ продолжимо на R. Тогда определение 1 модифицируется следующим образом.

О п р е д е л е н и е 1′. Приближенное решение $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots)$ будем называть W'-устойчивым, если можно указать величины W' и δ такие, что

$$\| u(t) - \psi(t) \| < W' \quad \forall t \geqslant 0$$

лишь только

$$\| u(0) - \psi(0) \| < \delta.$$

Определение W'-неустойчивости формулируем от противного.

Между понятием W'-устойчивости и устойчивостью по Ляпунову [2] устанавливается связь следующей леммой.

Л е м м а. *Если решение $u(t)$ уравнений (2.1) устойчиво (неустойчиво) по Ляпунову, а приближенное решение $\psi(t)$ W'-устойчиво (W'-неустойчиво), то $\psi(t)$ также устойчиво (неустойчиво) по Ляпунову.*

Доказательство леммы вытекает из определений W'-устойчивости, устойчивости по Ляпунову и формулы (2.6).

Наряду с системой (2.7′) рассмотрим однородную систему

$$\dot{\omega} = P(t)\,\omega. \tag{2.10}$$

Как отмечено в [2], решение (2.10) может быть записано в форме

$$\omega(t) = W(t, 0)\,\omega_0.$$

Теперь решение уравнения (2.7′) определим по формуле Коши

$$\omega(t) = W(t, 0)\,\omega_0 + \int_0^t W(t, s)\, Z(\psi, \dot{\psi}, f, s)\, ds. \tag{2.11}$$

Т е о р е м а 5. *Пусть оператор Коши линейной системы (2.10) удовлетворяет условию*

$$\| W(t, 0) \| \leqslant B e^{-\beta t}, \tag{2.12}$$

где B, $\beta > 0$ — const, — постоянные, не зависящие от t, функции $Z(\psi, \dot{\psi}, f, t)$ подчинены ограничению

$$\| Z(\psi, \dot{\psi}, f, t) \| < L \| \omega \|.$$

Тогда, если постоянные β, B, L удовлетворяют неравенству

$$\beta - BL > 0, \tag{2.13}$$

то приближенное решение $\psi(t)$ счетной системы уравнений (2.7) W-устойчиво.

Доказательство теоремы 5 основано на использовании формулы (2.11) и леммы 2.3 монографии [2].

Обратимся к функциям $Z(\psi, \dot{\psi}, f, t)$ и примем обозначение

$$R_s(\psi, \dot{\psi}, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} p_{sj}(t)\, a_{s\nu} t^{\nu} - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{s\nu-1} t^{\nu}. \tag{2.14}$$

При этом система (2.7′) принимает вид

$$\dot{\omega} = P(t)\omega + R(\psi, \dot{\psi}, t) + f(t). \tag{2.15}$$

Аналогично теореме 5 доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а 6. *Пусть для оператора Коши системы* (2.10) *выполняется условие* (2.12), *функции* $R(\psi, \dot{\psi}, t)$ *и* $f(t)$ *таковы, что*

$$\begin{aligned} &\| R(\psi, \dot{\psi}, t) \| \leqslant k \| \omega \|, \\ &\| f(t) \| \leqslant \gamma(t), \end{aligned} \tag{2.16}$$

где $\gamma(t)$ — *функция, интегрируемая на любом конечном интервале. Тогда для любого решения системы* (2.15) *имеет место оценка*

$$\| \omega(t) \| \leqslant B(S_1(t) + S_2(t)), \tag{2.17}$$

где

$$S_1(t) = e^{\alpha t} \| \omega_0 \|,$$

$$S_2(t) = e^{-\alpha t} \int\limits_0^t e^{\alpha s} \gamma(s)\, ds, \quad \alpha = \beta - BL.$$

З а м е ч а н и е 2. Используя схему доказательства теорем 5 и 6, для функций $\omega(t)$ можно получить оценки вида (2.17) с функциями $R(\psi, \dot{\psi}, t)$, подчиненными ограничениям вида

$$\| R(\psi, \dot{\psi}, t) \| \leqslant \pi(t),$$

где функция $\pi(t)$, как и в (2.16), интегрируема на любом интервале из $I \in R$.

Т е о р е м а 7. *Если решение* $u = 0$ *системы* (2.1) *устойчиво по Ляпунову, выполнены все условия теоремы* 5 *и замечания* 1, *тогда приближенное решение* $\psi(t)$ *системы* (2.1) *принадлежит полному нормированному кольцу* $l^p(\mathrm{I})$ *и устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство теоремы опирается на теоремы 3, 5 и лемму.

Отметим, что для специального класса бесконечных аналитических систем применение степенных рядов содержится в статье [5], где автор при построении формулы вычисления коэффициентов применяет известную формулу Лейбница.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Ф. Фильчаков. Решение нелинейных и линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем при помощи степенных рядов, УМЖ, т. 21, № 2, 1969.
2. Е. А. Барбашин, Введение в теорию устойчивости, «Наука», М., 1968.
3. М. А. Наймарк, Нормированные кольца, «Наука», М., 1968.
4. А. Ю. Лучка, Теория и применение метода осреднения функциональных поправок, Изд-во АН УССР, К., 1963.
5. Ю. В. Кузнецов, К аналитической теории бесконечных систем линейных дифференциальных уравнений, Дифференциальные уравнения, т. V, вып. 6, 1969.
6. А. А. Мартинюк, До (A, λ)-оцінок М. Г. Четаєва наближених інтегрувань, ДАН УРСР, сер. А, № 4, 1969.

Поступила 18.XII 1968 г.,
после переработки — 10.IV 1969 г.

Институт математики АН УССР

При этом система (2.7') принимает вид

$$\dot{\omega} = P(t)\omega + R(\psi, \dot{\psi}, t) + f(t). \tag{2.15}$$

Аналогично теореме 5 доказывается следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть для оператора Коши системы* (2.10) *выполняется условие* (2.12), *функции* $R(\psi, \dot{\psi}, t)$ *и* $f(t)$ *таковы, что*

$$\begin{aligned} \| R(\psi, \dot{\psi}, t) \| &\leqslant k \| \omega \|, \\ \| f(t) \| &\leqslant \gamma(t), \end{aligned} \tag{2.16}$$

где $\gamma(t)$ *— функция, интегрируемая на любом конечном интервале. Тогда для любого решения системы* (2.15) *имеет место оценка*

$$\| \omega(t) \| \leqslant B(S_1(t) + S_2(t)), \tag{2.17}$$

где

$$S_1(t) = e^{\alpha t} \| \omega_0 \|,$$

$$S_2(t) = e^{-\alpha t} \int\limits_0^t e^{\alpha s} \gamma(s)\, ds, \quad \alpha = \beta - BL.$$

Замечание 2. Используя схему доказательства теорем 5 и 6, для функций $\omega(t)$ можно получить оценки вида (2.17) с функциями $R(\psi, \dot{\psi}, t)$, подчиненными ограничениям вида

$$\| R(\psi, \dot{\psi}, t) \| \leqslant \pi(t),$$

где функция $\pi(t)$, как и в (2.16), интегрируема на любом интервале из $I \in R$.

Теорема 7. *Если решение* $u = 0$ *системы* (2.1) *устойчиво по Ляпунову, выполнены все условия теоремы* 5 *и замечания* 1, *тогда приближенное решение* $\psi(t)$ *системы* (2.1) *принадлежит полному нормированному кольцу* $l^p(\mathrm{I})$ *и устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство теоремы опирается на теоремы 3, 5 и лемму.

Отметим, что для специального класса бесконечных аналитических систем применение степенных рядов содержится в статье [5], где автор при построении формулы вычисления коэффициентов применяет известную формулу Лейбница.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Ф. Фильчаков. Решение нелинейных и линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем при помощи степенных рядов, УМЖ, т. 21, № 2, 1969.
2. Е. А. Барбашин, Введение в теорию устойчивости, «Наука», М., 1968.
3. М. А. Наймарк, Нормированные кольца, «Наука», М., 1968.
4. А. Ю. Лучка, Теория и применение метода осреднения функциональных поправок, Изд-во АН УССР, К., 1963.
5. Ю. В. Кузнецов, К аналитической теории бесконечных систем линейных дифференциальных уравнений, Дифференциальные уравнения, т. V, вып. 6, 1969.
6. А. А. Мартинюк, До (A, λ)-оцінок М. Г. Четаєва наближених інтегрувань, ДАН УРСР, сер. А, № 4, 1969.

Поступила 18.XII 1968 г.,
после переработки — 10.IV 1969 г.

Институт математики АН УССР