УДК 518:517.948

О градиентном варианте метода Ю. Д. Соколова

Л. П. Пеклова

Приближенное решение уравнения

$$x = y + Ax, \tag{1}$$

где A — линейный оператор в гильбертовом пространстве H, $x, y \in H$, 1 — регулярное значение, ищем в виде:

$$x_n = y + A(x_{n-1} + \alpha_n v_{n-1}), \quad v_{n-1} \in H, \tag{2}$$

$$\alpha_n v_{n-1} = P_n \delta_n = \frac{(\delta_n, v_{n-1})}{(v_{n-1}, v_{n-1})} v_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Здесь P_n — проектор пространства H на элемент v_{n-1},

$$\delta_n = x_n - x_{n-1} = \alpha_n A v_{n-1} - r_{n-1}, \quad r_{n-1} = x_{n-1} - A x_{n-1} - y. \tag{4}$$

Подставив (4) в (3) и решив полученное уравнение относительно α_n, получим

$$\alpha_n = - \frac{(r_{n-1}, v_{n-1})}{(U v_{n-1}, v_{n-1})}, \quad U = I - A, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

при $(U v_{n-1}, v_{n-1}) \neq \theta$.

Если $U = U^+$, где U^+ — самосопряженный, положительно определенный оператор, то формула (5) совпадает с условием минимума функционала

$$F(x) = (U^+ x, x) - 2(x, y), \tag{6}$$

где

$$x = \bar{x}_n = x_{n-1} + \alpha_n v_{n-1}. \tag{7}$$

При $v_{n-1} = e$ (e — единичный элемент пространства H, $n = 1, 2, \ldots$) получим простейший вариант метода Ю. Д. Соколова [1], который является сочетанием «спуска» в направлении вектора e с последующей итерацией.

При $v_{n-1} = -r_{n-1}$ ($n = 1, 2, \ldots$) получим градиентный вариант метода, когда направление «спуска» совпадает с направлением антиградиента функционала $F(\bar{x}_n)$.

Обозначим через m, M границы опeратара $U = U^+$.

Т е о р е м а. *Последовательные приближения x_n градиентного варианта сходятся к x^* — точному решению уравнения* (1) *с быстротой, определяемой неравенством:*

$$\| x_n - x^* \| \leqslant \frac{\| r_0 \|}{m} q^n, \quad q = \| A \| \frac{M - m}{M + m} < 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следуя методике доказательства, приведенного в работе [2], рассмотрим уравнение, эквивалентное уравнению (1):

$$x = Tx + ky, \; T = I - kU, \; k > 0. \tag{8}$$

Оператор T имеет минимальную норму

$$\| T \| = \frac{M - m}{M + m}.$$

Обозначим $\widetilde{x}_1 = Tx_0 + ky = x_0 - kr_0$ и сравним $\widetilde{x}_1$ с $\overline{x}_1 = x_0 - \alpha_1 r_0$. Так как $F(x)$ достигает минимума при $x = \overline{x}_1$, то

$$F(\overline{x}_1) \leqslant F(\widetilde{x}_1). \tag{9}$$

Пусть $V = U^{\frac{1}{2}}$, тогда

$$F(x) = \| V(x - x^*) \|^2 - \| Vx^* \|^2. \tag{10}$$

Из (9) и (10) получим

$$\| V(\overline{x}_1 - x^*) \| \leqslant \| V(\widetilde{x}_1 - x^*) \|. \tag{11}$$

Но $\widetilde{x}_1 - x^* = T(x_0 - x^*)$, тогда

$$\| V(\overline{x}_1 - x^*) \| \leqslant \| T \| \cdot \| V(x_0 - x^*) \|. \tag{12}$$

По формуле (2) при $n = 1$ $x_1 = y + A\overline{x}_1$, тогда

$$\| x_1 - x^* \| \leqslant \| A \| \cdot \| \overline{x}_1 - x^* \| \leqslant \| A \| \cdot \| V^{-1} \| \cdot \| V(\overline{x}_1 - x^*) \|$$

Используя неравенство (12), получим

$$\| x_1 - x^* \| \leqslant \| A \| \cdot \| V^{-1} \| \cdot \| T \| \cdot \| V(x_0 - x^*) \| = \frac{1}{\sqrt{m}} q \| V(x_0 - x^*) \|, \tag{13}$$

где $q = \| A \| \cdot \| T \|$.

Повторяя рассуждения при $n = 2$, находим

$$\| x_2 - x^* \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{m}} q \| V(x_1 - x^*) \| \leqslant q \| x_1 - x^* \|$$

и, вообще,

$$\| x_n - x^* \| \leqslant q^{n-1} \| x_1 - x^* \|. \tag{14}$$

Подставив оценку (13) для $\| x_1 - x^* \|$ в (14), имеем

$$\| x_n - x^* \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{m}} q^n \| V(x_0 - x^*) \| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{m}} q^n \| V^{-1} \| \cdot \| U(x_0 - x^*) \| = \frac{1}{m} q^n \| r_0 \|,$$

$\lim\limits_{n \to \infty} \| x_n - x^* \| = 0$ при условии $q < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Д. Соколов. Метод осреднения функциональных поправок. «Наукова думка», К., 1967.
2. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.

Поступила 6.II 1968 г.

Институт математики АН УССР