УДК 517.942.82

Исследование одного класса линейных дифференциальных уравнений со случайными запаздываниями

В. М. Алексеев

В статье рассмотрены системы линейных дифференциальных уравнений с экспоненциальными коэффициентами и случайными запаздываниями аргумента. Для получения асимптотического разложения решения применяется преобразование Лапласа. Приведены примеры уравнений второго порядка указанного выше типа, получены асимптотические формулы для математического ожидания, корреляционной функции и одномерного закона распределения случайных процессов, являющихся решением данных уравнений.

1. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с экспоненциальными коэффициентами и случайными запаздываниями следующего вида:

$$\frac{d^nY(t)}{dt^n}+\sum_{q=0}^{l}e^{-\alpha_q t}\sum_{k=0}^{n-1}A_{q,k}\frac{d^kY(t-\tau_{q,k})}{dt^k}=\Phi(t). \tag{1.1}$$

Здесь $Y(t)$ — m-мерный вектор, $\tau_{0,k}$ — положительные постоянные, $A_{q,k}$ — постоянные комплексные матрицы размера $m\times m$. Для комплексных чисел α выполняются условия

$$\alpha_0=0,\qquad \operatorname{Re}\alpha_q>0\qquad (q=1,2,\ldots,l). \tag{1.2}$$

Для случайных величин $\tau_{q,k}$ выполняются следующие условия:

$$P\{\tau_{q,k}<x\}=\int_0^x f_{q,k}(t)\,dt;\qquad P\{\tau_{q,k}\geqslant 0\}=1,\qquad (k=0,1,\ldots,n-1;\; q=1,\ldots,l). \tag{1.3}$$

В дальнейшем будем обозначать: $P\{A\}$ — вероятность события A, E — единичная матрица, $M(\xi)$ и $D(\xi)$ — соответственно математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ.

Пусть изображением вектора $\Phi(t)$ $(t\geqslant 0)$ является мероморфный вектор $Q(p)$, компоненты которого регулярны и ограничены при $\operatorname{Re}p\geqslant b=\text{const}$.

Ищем при $t>0$ решение $Y(t)$ системы (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$Y(t)=Y_0^{(0)}(t),\ldots,\frac{d^{n-1}Y(t)}{dt^{n-1}}=Y_0^{(n-1)}(t),\qquad t\in[0,-\infty), \tag{1.4}$$

где векторы $Y_0^{(l)}(t)$ ограничены при всех t.

2. В работе существенно использованы результаты работы [1]. Аналогично [1] строится система линейных разностных уравнений для изображения по Лапласу $F(p)$ решения $Y(t)$ [2]:

$$\sum_{q=0}^{l} L_q(p+\alpha_q) F(p+\alpha_q) = R(p). \tag{2.1}$$

Здесь

$$R(p) = Q(p) + \sum_{j=0}^{n-1} Y_0^{(j)}(0) p^{n-j-1} +$$

$$+ \sum_{q=0}^{l} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} A_{q,k} Y_0^{(j)}(0) (p+\alpha_q)^{k-j-1} e^{-\tau_{q,k}(p+\alpha_q)} +$$

$$+ \sum_{q=0}^{l} \sum_{k=0}^{n-1} A_{q,k} \int_{-\tau_{q,k}}^{0} Y_0^{(k)}(t) e^{-(p+\alpha_q)(t+\tau_{q,k})} dt; \tag{2.2}$$

$$L_0(p) = Ep^n + \sum_{k=0}^{n-1} e^{-p\tau_{0,k}} p^k A_{0,k};$$

$$L_q(p) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-p\tau_{q,k}} p^k A_{q,k} \qquad (q = 1, 2, \ldots, l).$$

Элементы случайных матриц $L_q(p)$ являются целыми случайными функциями p и равномерно по $\operatorname{Im} p$ с вероятностью 1 удовлетворяют условию

$$\lim_{\operatorname{Re} p \to +\infty} \sum_{q=1}^{l} |L_0^{-1}(p) L_q(p+\alpha_q)| = 0. \tag{2.3}$$

Здесь символ $|A|$ означает норму матрицы

$$A = \| a_{sj} \|_1^m, \qquad |A| = \max \sum_{j=1}^{m} |a_{sj}|. \tag{2.4}$$

В силу исходных предположений случайный вектор $R(p)$ с вероятностью 1 будет удовлетворять условию

$$\lim_{\operatorname{Re} p \to +\infty} |L_0^{-1}(p) R(p)| = 0. \tag{2.5}$$

Используя (2.2), введем обозначения

$$K_q(p) = -L_0^{-1}(p) L_q(p+\alpha_q); \qquad R_1(p) = L_0^{-1}(p) R(p). \tag{2.6}$$

Аналогично [1] получаем методом последовательных приближений решение $F(p)$:

$$F(p) = \lim_{j\to\infty} F_j(p),$$

$$F_l(p) = R_1(p) + \sum_{r=1}^{j} \sum_{q_l=1,\ldots,l} K_{q_1}(p) K_{q_2}(p+\alpha_{q_1}) \times$$

$$\times K_{q_3}(p+\alpha_{q_1}+\alpha_{q_2}) \ldots K_{q_r}(p+\alpha_{q_1}+\ldots\alpha_{q_{r-1}}) R_1(p+\alpha_{q_1}+\ldots+\alpha_{q_r}). \tag{2.7}$$

3. Назовем порождающим следующее уравнение:

$$\det L_0(p) = 0. \tag{3.1}$$

Обозначим корни этого уравнения через $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_k, \ldots$ Рассмотрим числа

$$p_{k_0,k_1,\ldots,k_l} = \varrho_{k_0} - k_1\alpha_1 - \ldots - k_l\alpha_l \qquad (k_q = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$q = 0, 1, \ldots, l). \tag{3.2}$$

Обозначим через Σ_ε многосвязную область комплексной плоскости p, определенную неравенством

$$|p - p_{k_0,k_1,\ldots,k_l}| \geqslant \varepsilon > 0. \tag{3.3}$$

Если $p \in \Sigma_\varepsilon$ и $\operatorname{Re} p \geqslant b_2$, то из условия (2.3) следует с вероятностью 1, что ряд (2.7) сходится абсолютно и равномерно. Из (3.1) и (2.6) следует, что полюсы слагаемых, входящих в (2.7), могут находиться лишь в точках $p_{k_0,k_1,\ldots,k_l}$ (3.2) и иметь конечный порядок.

Рассмотрим случайную вектор-функцию (r — целое достаточно большое число)

$$H_j(p) = F_j(p)(p - p_{k_0,k_1,\ldots,k_l})^r. \tag{3.4}$$

При достаточно малом $\varepsilon > 0$ вектор $H_j(p)$ регулярен в круге C_ε ($|p - p_{k_0,k_1,\ldots,k_l}| \leqslant \varepsilon$).

Рассмотрим $|H(p) - H_j(p)|$, где

$$H(p) = F(p)(p - p_{k_0,k_1,\ldots,k_l})^r, \tag{3.5}$$

$$|H(p) - H_j(p)| = \left| \sum_{r=j+1}^{\infty} \sum_{q_k = 1,\ldots,l} \left\{ \prod_{k=1}^{n} K_{q_k}(p + \alpha_{q_1} + \ldots + \alpha_{q_{k-1}}) \right\} \times \right.$$

$$\left. \times R_1(p + \alpha_{q_1} + \ldots + \alpha_{q_r})(p - p_{k_0,k_1,\ldots,k_l})^r \right|. \tag{3.6}$$

Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$, что при $r > N(\varepsilon)$ $\operatorname{Re}\left(p + \sum_{i=1}^{r} \alpha_{q_i}\right) \geqslant b$, и из (2.3) и (2.5) получим

$$\sum_{q=1}^{l} |K_q(p)| < \varepsilon, \qquad |R_1(p)| < \varepsilon. \tag{3.7}$$

Так как все $\tau_{q,k}$ ограничены с вероятностью 1, то, учитывая (3.7), (2.2) и (2.6), получим

$$|H(p) - H_j(p)| < \frac{(\varepsilon_1)^{j+1}}{1 - \varepsilon_1}, \tag{3.8}$$

где $0 < \varepsilon_1 < \dfrac{1}{2}$.

Таким образом, при $j \to \infty$ $|H(p) - H_j(p)| \to 0$ с вероятностью 1, и получаем теорему.

Теорема 1. *Пусть в системе* (1.1) $\Phi(t) \equiv 0$. *Тогда изображение* (2.1) *по Лапласу* $F(p)$ *решения* $Y(t)$ *с вероятностью* 1 *представимо в виде ряда* (2.7). *Мероморфный случайный вектор* $F(p)$ *может иметь полюсы конечной кратности лишь в точках* $p_{k_0,k_1,\ldots,k_l}$, *определенных* (3.2). *Коэффициенты разложения* $F_j(p)$ *в ряд Лорана в точках* $p = p_{k_0,k_1,\ldots,k_l}$ *сходятся к соответствующим коэффициентам разложения* $F(p)$ *с вероятностью* 1.

Это утверждение позволяет получить разложение решения в асимптотический ряд при больших значениях t:

$$Y(t) \sim \sum_{k_0, k_1, \ldots, k_l = 0}^{\infty} \operatorname{res}(F(p)\,e^{pt})\big|_{p=p_{k_0; k_1, \ldots, k_l}}. \tag{3.9}$$

Из этого свойства и теоремы 1 следует теорема.

Теорема 2. *С вероятностью* 1 *можно утверждать следующее:*

1) *решения системы* (1.1) *асимптотически устойчивы, если* $\operatorname{Re}\varrho_k < 0$;

2) *решения системы* (1.1) *неустойчивы, если хотя бы для одного* ϱ_{k_0} $\operatorname{Re}\varrho_{k_0} > 0$.

Рассмотрим системы вида

$$\frac{dY(t)}{dt} = Y(t) + Be^{-t}Y(t-\tau) \tag{3.10}$$

с начальными условиями

$$Y(0) = Y_0, \qquad Y(t) = 0, \qquad t < 0.$$

Здесь $Y(t)$ — m-мерный вектор, τ — случайная величина с плотностью $f(x)$, равной нулю для отрицательных x. Из (3.9) получим асимптотическое разложение для $Y(t)$

$$Y(t) \sim \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\exp\left[-kt + \frac{\tau k(k-3)}{2}\right]}{k!} B^k\right] B_0. \tag{3.11}$$

Обозначим приближение k-го порядка для $Y(t)$ через $Y(t, k) = \{y_i(t, k)\}$. Тогда из (3.11) получим

$$Y(t, k) = \left[\sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{\exp\left[-(n-1)t + \frac{\tau n(n-3)}{2}\right]}{n!} B^n\right] B_k(\tau) \tag{3.12}$$

где вектор $B_k(\tau)$ находится из начальных условий. Невязка будет случайной функцией вида

$$R_k(t, \tau) = \frac{\exp\left[-kt + \frac{\tau(k+1)(k-2)}{2}\right]}{k!} B^k B_k(\tau). \tag{3.13}$$

Очевидно, что при $t \to \infty$ $P\{|R_k(t, \tau)| < \varepsilon\} \to 1$. Обозначим через $m(t, k)$ и $K(t_1, t_2, k)$ соответственно математическое ожидание и взаимную корреляционную матрицу [3] вектора $Y_k(t)$, тогда из (3.12) получим

$$m(t, k) = \{m_i(t, k)\}, \qquad m_i(t, k) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \frac{\exp[-(s-1)t]}{s!} m_i^{(s)}, \tag{3.14}$$

$$K(t_1, t_2, k) = \| K_{ij}(t_1, t_2, k) \|, \qquad i, j = 1, \ldots, n;$$

$$K_{ij}(t_1, t_2, k) = \sum_{n=0}^{k} \sum_{s=0}^{k} (-1)^{n+s} \frac{\exp[-nt_1 - st_2]}{n!\, s!} m_{ij}^{(n,s)}. \tag{3.15}$$

где $m^{(n)} = \{m_i^{(n)}\}$; $m_i^{(n)} = M\alpha_i^{(n)}(\tau)$; $\alpha^{(n)}(\tau) = \{\alpha_i^{(n)}(\tau)\} = \exp\left[\frac{\tau n(n-3)}{2}\right] B^{-1} B_k(\tau)$; $m_{ij}^{(n,s)} = M\alpha_i^{(n)}(\tau)\,\alpha_j^{(s)}(\tau) - m_i^{(n)} m_j^{(s)}$

Пример 1 Для системы 2-го порядка вида (3.10) с матрицей $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ получим

$$m_i(t, 1) = e^t - 3(e^t - 1)\, m_i,$$
$$K_{ij}(t_1, t_2, 1) = 9(e^{t_1} - 1)(e^{t_2} - 1)(m_{ij} - m_i m_j), \qquad i, j = 1, 2, \tag{3.16}$$

где $m_i = Ma_i(\tau)$; $m_{ij} = Ma_i(\tau)\, a_j(\tau)$, $i, j = 1, 2$; $a_1(\tau) = \frac{e^{-2\tau}}{a(\tau)}$; $a_2(\tau) = \frac{e^{-2\tau} - e^{-\tau}}{a(\tau)}$; $a(\tau) = 1 - 2e^{-\tau} + 3e^{-2\tau}$.

Найдем функцию распределения $Y_1(t, 1)$, обозначив ее $P_1(t, x)$:

$$P_1(t, x) = \begin{cases} 0 & (x < 1,\ D(t, x) \leqslant 0), \\ 1 - \int\limits_{z_1(t,x)}^{z_2(t,x)} f_z(y)\, dy & (x > 1,\ D(t, x) > 0), \\ \int\limits_{z_1(t,x)}^{z_2(t,x)} f_z(y)\, dy & (x < 1,\ D(t, x) > 0), \\ \int\limits_{0,s}^{1} f_z(y)\, dy & (x = 1,\ t > 0), \\ 1 & (x > 1,\ D(t, x) \leqslant 0). \end{cases} \tag{3.17}$$

Здесь $z_1(t, x)$, $z_2(t, x)$, $D(t, x)$ обозначают соответственно корни и дискриминант уравнения

$$3z^2(1 - x) + 2z(x - e^t) - (x - e^t) = 0,$$

а $f_z(y)$ — плотность распределения

$$f_z(y) = y^{-1} f(-\ln y).$$

Аналогичную формулу можно получить и для $P_2(t, x)$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{y}(t) - 0{,}16 y(t) = e^{-t}\dot{y}(t - \tau) + e^{-2t} y(t - \tau) \tag{3.18}$$

с начальными условиями

$$y(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \qquad \dot{y}(t) = 0,\ t \leqslant 0.$$

Аналогично примеру 1 получим первое приближение решения $y(t, 1)$

$$y(t, 1) = a^{-1}(x)\,[x^2 A_0(t) + x A_1(t) + A_2(t)], \tag{3.19}$$

где $x = e^{0,4\tau}$; $A_0(t) = 0{,}74e^{0,4t} + 0{,}4e^{-0,4t}(0{,}18e^{-2t} + 0{,}22e^{-t})$; $A_1(t) = e^{0,4t}(0{,}4 + 0{,}31e^{-2t} + 1{,}48e^{-t}) + e^{-0,4t}(0{,}4 - 0{,}33e^{-2t} - 0{,}41e^{-t})$; $A_2(t) = 0{,}4e^{0,4t} \times (0{,}42e^{-2t} + 2e^{-t}) - 1{,}87e^{-0,4t}$; $a(x) = -0{,}9 + 4{,}43x + 0{,}35x^2$.

Найдем математическое ожидание и корреляционную функцию $y(t, 1)$, обозначив их соответственно $m(t)$ и $R(t_1, t_2)$:

$$m(t) = \sum_{k=0}^{2} m_k A_k(t), \tag{3.20}$$

$$R(t_1, t_2) = \sum_{k=0}^{2} A_k(t_1) A_k(t_2) D(\xi_k) + \sum_{\substack{k,m=0,\\ k\neq m}}^{2} A_k(t_1) A_m(t_2) M(\xi_k \xi_m), \tag{3.21}$$

где $\xi_k = \eta_k - M\eta_k$; $\eta_k = \dfrac{x^{2-k}}{a(x)}$; $m_k = M\eta_k$; $k = 0, 1, 2$.

В заключение благодарю К. Г. Валеева за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Г. Валеев, О линейных дифференциальных уравнениях с экспоненциальными коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента. Регулярный случай, Прикл. матем. и мех., вып. 3, 1962.
2. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, М., 1958.
3. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов. «Наука», М., 1965.

Поступила 12.II 1968 г.,
после переработки — 17.II 1969 г.

Киевский институт инженеров гражданской авиации