УДК 517.948.33

Приближенное решение некоторых нелинейных интегральных уравнений

Л. П. Пеклова

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$F[x, y(x)] = \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi, \tag{1}$$

где λ — действительное число, при следующих предположениях.

1. Функция $\varphi(x)$, не равная тождественно нулю, непрерывна и ограничена при $a \leqslant x \leqslant b$, т. е. $\varphi \leqslant \varphi(x) \leqslant \Phi$.

2. Функция $K(x, |\xi|)$ либо непрерывна «почти всюду» при $a \leqslant x, \xi \leqslant b$, либо является полярным ядром вида

$$K(x, \xi) = \frac{\overline{K}(x, \xi)}{|x - \xi|^{\varrho}},$$

где $0 < \varrho < 1$, $\overline{K}(x, \xi)$ — непрерывная функция при $a \leqslant x, \xi \leqslant b$.

3. Функция $F(x, y)$ непрерывна в области $D\ \{a \leqslant x \leqslant b,\ m \leqslant y \leqslant M\}$, имеет в этой области непрерывную производную $F'_y(x, y) \neq 0$, так что, если

$$\inf_{x, y \in D} |F'_y(x, y)| = \frac{1}{A},$$

то

$$|F(x, y) - F(x, \overline{y})| \geqslant \frac{1}{A}\, |y - \overline{y}| \quad A = A(m, M). \tag{A}$$

Функция $F(x, y)$ предполагается такой, что ее обратная либо не выражается в элементарных функциях в конечном виде, либо выражается очень сложно.

Построим последовательные приближения по методу Ю. Д. Соколова [1—5]

$$F[x, y_n(x)] = \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)\,[y_{n-1}(\xi) + c_n \psi(\xi)]\, d\xi, \tag{2}$$

$$c_n = \int_a^b \delta_n(x)\, dx, \quad \delta_n(x) = y_n(x) - y_{n-1}(x),\ n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Здесь $\psi(x)$ — некоторая непрерывная, ограниченная на отрезке $[a, b]$, неотрицательная функция, т. е. $0 \leqslant \psi \leqslant \psi(x) \leqslant \Psi$, причем $\|\psi(x)\|^2 = 1$. В частности, если $\sqrt{h}\,\psi(x) = 1$, $h = b - a > 0$, то получим простейший вариант метода

$$F[x, y_n(x)] = \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)[y_{n-1}(\xi) + \alpha_n]\,d\xi, \tag{4}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{h}\int_a^b \delta_n(x)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Сформулируем теорему существования неявной функции.

Теорема 1. *Если функция $P(x, y, z) = F(x, y) - z$ определена и непрерывна в области $\{a \leqslant x \leqslant b,\ m \leqslant y \leqslant M,\ f \leqslant z \leqslant F\}$, имеет в ней непрерывную частную производную $P'_y(x, y, z) = F'_y(x, y) \neq 0$, причем*

$$f = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} F(x, m),\ F = \inf_{a \leqslant x \leqslant b} F(x, M) \quad (F'_y(x, y) > 0),$$

$$f = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} F(x, M),\ \ F = \inf_{a \leqslant x \leqslant b} F(x, m) \quad (F'_y(x, y) < 0),$$

то уравнение $F(x, y) - z = 0$ имеет единственное, непрерывное, действительное решение $y = Y(x, z)$, принадлежащее отрезку $[m, M]$ при $a \leqslant x \leqslant b$, $f \leqslant z \leqslant F$.

В дальнейшем везде для определенности считаем, что $F'_y(x, y) > 0$ в области D и что все переменные принимают действительные значения.

Пусть в области D $\overline{M} = \max\{|M|, |m|\}$. Введем также следующие обозначения:

$$\int_a^b K(x, \xi)\,\psi(\xi)\,d\xi = R(x),\ \sup_{a \leqslant x \leqslant b}\int_a^b |K(x, \xi)|\,d\xi = L, \quad |\lambda| = l,$$

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |R(x)| = R,\ \ \sup_{a \leqslant x \leqslant b}\left|\int_a^b K(x, \xi)\,d\xi\right| = K, \quad M - m = \eta,$$

$$\int_a^b \left|\int_a^b K(x, \xi)\,d\xi\right| \psi(x)\,dx = H,\ \ \frac{1}{h}\int_a^b \left|\int_a^b K(x, \xi)\,d\xi\right| dx = N,\ \ \int_a^b \psi(x)\,dx = s.$$

На основании теоремы 1 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Если m и M удовлетворяют одной из систем*

$$\begin{array}{ll} \Phi + l\overline{M}L + l\eta sR \leqslant F, & \Phi + l\overline{M}Ls\Psi + l\eta sR \leqslant F, \\ \varphi - l\overline{M}L - l\eta sR \geqslant f, & \varphi - l\overline{M}Ls\Psi - l\eta sR \geqslant f, \\ s\Psi \leqslant 1, & s\Psi \geqslant 1, \end{array}$$

то все $y_n(x)$, определяемые по (2), (3), попадут внутрь промежутка $[m, M]$. Кроме того, $ms \leqslant c_1 \leqslant Ms$ и $-\eta s \leqslant c_n \leqslant \eta s$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Если $AlH < 1$, то c_n — единственный корень уравнения (3) на отрезке $[ms, Ms]$ при $n = 1$ и на $[-\eta s, \eta s]$ при $n = 2, 3, \ldots$

Следствие. *Если m и M удовлетворяют условиям*

$$\Phi + l\overline{M}L + l\eta K \leqslant F, \quad \varphi - l\overline{M}L - l\eta K \geqslant f,$$

то все y (x), определяемые по (4), (5), попадут внутрь отрезка $[m, M]$. Кроме того, $m \leqslant \alpha_1 \leqslant M$, $|\alpha_n| \leqslant \eta$, $n, = 2, 3\ \ldots$ Если $AlN < 1$, то α_n — единственный корень уравнения (5) на соответствующем промежутке.

С помощью условия (А) можно получить ряд достаточных признаков сходимости метода. Приведем некоторые из них.

Так как правая часть уравнения (1) линейна, то, пользуясь формулой, аналогичной приведенной в работе [6]

$$|\delta_n(x)| \leqslant Al \left| \int_a^b [K(x,\xi) - \psi(\xi) R(x)] [\delta_{n-1}(\xi) - c_{n-1} t \psi(\xi)] \, d\xi + c_n R(x) \right|, \quad (6)$$

где t — любое число, получим следующий достаточный признак сходимости:

$$\varepsilon_1 = \frac{Al}{1 - AlH^*} [\overline{L} - Al(R\overline{H} - \overline{L}H^*)] < 1,$$

$$\overline{H} = \int_a^b \psi(x)\,dx \int_a^b |K(x,\xi) - \psi(\xi) R(x)|\,d\xi, \quad H^* = \int_a^b |R(x)|\,\psi(x)\,dx,$$

$$\overline{L} = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \int_a^b |K(x,\xi) - \psi(\xi) R(x)|\,d\xi.$$

Соответствующая оценка погрешности n-го приближения имеет вид

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon_1^n}{1 - \varepsilon_1} \mu_1, \quad \mu_1 = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |y_1(x)|.$$

На основании (6) можно получить также более общие достаточные признаки

$$\varepsilon_{01} = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} Al \int_a^b H(x,\xi)\,d\xi < 1,$$

$$\varepsilon_2 = Al \left\{ \int_a^b \int_a^b H^2(x,\xi)\,dx d\xi \right\}^{1/2} < 1,$$

где

$$H(x,\xi) = |K(x,\xi) - \psi(\xi) R(x)| + \frac{Al\,|R(x)|}{1 - AlH^*} \int_a^b |K(t,\xi) - \psi(\xi) R(t)|\,\psi(t)\,dt,$$

и оценки погрешности n-го приближения

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon_{01}^n}{1 - \varepsilon_{01}} \mu_1,$$

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant Al \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \sqrt{\int_a^b H^2(x,\xi)\,d\xi}\ \frac{\varepsilon_2^{n-1}}{1 - \varepsilon_2} \sqrt{\Delta_1}, \quad \Delta_1 = \int_a^b y_1^2(x)\,dx.$$

ЛИТЕРАТУРА

1 Ю. Д. Соколов, Об одной задаче теории установившегося движения грунтовых вод, УМЖ, г. V, № 2, 1953.
2. Ю. Д. Соколов, О методе осреднения функциональных поправок, УМЖ, т. IX, № 1, 1957.
3. Ю. Д. Соколов, О достаточных признаках сходимости метода осреднения функциональных поправок, УМЖ, т. 17, № 3, 1965.
4. Ю. Д. Соколов, Метод осреднения функциональных поправок, «Наукова думка», К., 1967.
5. А. Ю. Лучка, Теория и применение метода осреднения функциональных поправок, Изд-во АН УССР, К., 1963.
6. А. Ю. Лучка, Достаточные условия сходимости метода осреднения функциональных поправок, ДАН СССР, т. 122, № 2, 1958.

Поступила 19.XI 1968 г.

Институт математики АН УССР