УДК 519.214

Об асимптотике распределения одного функционала от простейшего симметричного случайного блуждания на прямой

Р. В. Бойко

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $+1$ и -1 с вероятностью $\frac{1}{2}$.

Рассмотрим случайную величину

$$\eta_{2n,x} = \sum_{l=0}^{2n} f(S_l + x),$$

где $S_0 = 0$, $S_l = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_l$, $f(1) = 1$, $f(0) = -1$ и $f(x) = 0$ при $x \neq 0{,}1$ (x — целое число).

Нас будет интересовать асимптотическое разложение вероятности

$$P_{2n,1}(k) = P\{\eta_{2n,1} = k\}.$$

Известно [1], что при $n \to \infty$ η_{2nx} имеет порядок роста $n^{\frac{1}{4}}$, поэтому асимптотика для $P_{2n,1}(k)$ будет строиться при $k = O(n^{\frac{1}{4}})$.

1. Рассмотрим случайные величины

$$\eta_{m,x} = \sum_{l=0}^{m} f(S_l + x) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Обозначим

$$U_z(m, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k P\{\eta_{m,x} = k\},$$

тогда, используя формулу полной вероятности, получим следующие соотношения для $U_z(m, x)$:

$$U_z(m, 1) = \frac{z}{2} U_z(m-1, 0) + \frac{z}{2} U_z(m-1, 2), \tag{1}$$

$$U_z(m, 0) = \frac{1}{2z} U_z(m-1, -1) + \frac{1}{2z} U_z(m-1, 1) \tag{2}$$

и

$$U_z(m, x) = \frac{1}{2} U_z(m-1, x-1) + \frac{1}{2} U_z(m-1, x+1) \qquad (x \neq 0, 1). \tag{3}$$

Из (1 — 3) для функции

$$\varphi_{z,\lambda}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m U_z(m, x)$$

получим:

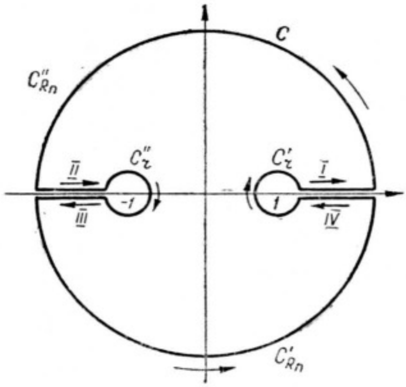
$$\varphi_{z,\lambda}(1) - z = \frac{\lambda z}{2} \varphi_{z,\lambda}(0) + \frac{\lambda z}{2} \varphi_{z,\lambda}(2), \tag{4}$$

$$\varphi_{z,\lambda}(0) - \frac{1}{z} = \frac{\lambda}{2z} \varphi_{z,\lambda}(-1) + \frac{\lambda}{2z} \varphi_{z,\lambda}(1), \tag{5}$$

$$\varphi_{z,\lambda}(x) - 1 = \frac{\lambda}{2} \varphi_{z,\lambda}(x-1) + \frac{\lambda}{2} \varphi_{z,\lambda}(x+1) \text{ при } x \neq 0, 1. \tag{6}$$

Решив разностное уравнение (6) с граничными условиями (4), (5), получим

$$\varphi_{z,\lambda}(1) = \frac{-z\,[z(1-\lambda+\sqrt{1-\lambda^2})+\lambda(1-\lambda)]}{(1-\lambda)\,[z^2(1-\sqrt{1-\lambda^2}) - z(3-\lambda^2-\sqrt{1-\lambda^2})+(1-\sqrt{1-\lambda^2})]}.$$



Тогда

$$\psi_{\lambda,k}(1) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m P_{m,1}(k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \varphi_{z,\lambda}(1)\,\frac{dz}{z^{k+1}}. \tag{7}$$

Принимая во внимание то, что точки $z_1(\lambda)$ и $z_2(\lambda)$ являются полюсами функции $\varphi_{z,\lambda}(1)$, можно формулу (7) переписать так:

$$\Psi_{\lambda,k}(1) = \frac{z_j(\lambda)(1-\lambda+\sqrt{1-\lambda^2})+\lambda(1-\lambda)}{(1-\lambda)\sqrt{(3-\lambda^2-\sqrt{1-\lambda^2})^2-4(1-\sqrt{1-\lambda^2})^2}}\, z_j^{-k}(\lambda),$$

где $j=1$ при $k>0$ и $j=2$ при $k<0$,

$$z_1(\lambda) = \frac{3-\lambda^2-\sqrt{1-\lambda^2}+\sqrt{(3-\lambda^2-\sqrt{1-\lambda^2})^2-4(1-\sqrt{1-\lambda^2})^2}}{2(1-\sqrt{1-\lambda^2})},$$

$$z_2(\lambda) = \frac{3-\lambda^2-\sqrt{1-\lambda^2}-\sqrt{(3-\lambda^2-\sqrt{1-\lambda^2})^2-4(1-\sqrt{1-\lambda^2})^2}}{2(1-\sqrt{1-\lambda^2})}.$$

Выберем ту ветвь функции $\Psi_{\lambda,k}(1)$, для которой $\arg\sqrt{1-\lambda^2}=0$ и $\arg\sqrt{(3-\lambda^2-\sqrt{1-\lambda^2})^2-4(1-\sqrt{1-\lambda^2})^2}=0$ при $0<\lambda<1$. При таком выборе ветви точка $\lambda=0$ не является точкой ветвления функции $\Psi_{\lambda,k}(1)$. Поэтому можно записать, что $P_{2n,1}(k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|<1} \Psi_{\lambda,k}(1)\,\times$

$$\times\,\lambda^{-(2n+1)}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|<1} \frac{z_j(\lambda)(1-\lambda+\sqrt{1-\lambda^2})+\lambda(1-\lambda)}{(1-\lambda)\sqrt{(3-\lambda^2-\sqrt{1-\lambda^2})^2-4(1-\sqrt{1-\lambda^2})^2}}\,\times$$

$$\times\, z_j^{-k}(\lambda)\,\frac{d\lambda}{\lambda^{2n+1}}. \tag{8}$$

2. Для того, чтобы получить асимптотическое разложение распределения $P_{2n,1}(k)$, преобразуем выражение (8) так. Заменим в интеграле (8) контур интегрирования контуром **C** (см. рисунок). Таким образом,

$$P_{2n,1}(k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \Psi_{\lambda,k}(1)\,\lambda^{-(2n+1)}\,d\lambda.$$

Нетрудно заметить, что если взять $R_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ и $r = e^{-n}$, то

$$\left| \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'_{R_n}+C''_{R_n}+C'_r+G''_r} \Psi_{\lambda,k}(1)\,\lambda^{-(2n+1)}\,d\lambda \right| = O(e^{-n^{\gamma}}),$$

где $0 < \gamma < 1$. Тогда

$$P_{2n,1}(k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{I+II+III+IV}} \Psi_{\lambda,k}(1)\lambda^{-(2n+1)}d\lambda + O(e^{-n^{\gamma}})$$

или

$$P_{2n,1}(k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1}^{R_n} \frac{z_{j1}(x)(1-x-i\sqrt{x^2-1}) + x(1-x)}{(1-x)\,x^{2n+1}\sqrt{|w_1(x)|}\,e^{\frac{i}{2}\arg w_1(x)}}\, z_{j1}^{-k}(x)\,dx -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1}^{R_n} \frac{z_{j4}(x)(1-x+i\sqrt{x^2-1}) + x(1-x)}{(1-x)\,x^{2n+1}\sqrt{|w_4(x)|}\,e^{\frac{i}{2}\arg w_4(x)}}\, z_{j4}^{-k}(x)dx +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-R_n}^{-1} \frac{z_{j2}(x)(1-x+i\sqrt{x^2-1}) + x(1-x)}{(1-x)\,x^{2n+1}\sqrt{|w_2(x)|}\,e^{\frac{i}{2}\arg w_2(x)}}\, z_{j2}^{-k}(x)dx -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-R_n}^{-1} \frac{z_{j3}(x)(1-x-i\sqrt{x^2-1} + x(1-x)}{(1-x)\,x^{2n+1}\sqrt{|w_3(x)|}\,e^{\frac{i}{2}\arg w_3(x)}}\, z_{j3}^{-k}(x)\,dx + O(e^{-n\delta}), \quad (9)$$

где $0 < \delta < 1$,

$$w(\lambda) = (3-\lambda^2-\sqrt{1-\lambda^2})^2 - 4(1-\sqrt{1-\lambda^2})^2,$$

$w_m(x)$ $(m = \overline{1,4})$ — значения функции $w(\lambda)$ соответственно на участках I—IV контура интегрирования C,

$$z_{jm}(x) = \frac{3-x^2+(-1)^{m+1}i\sqrt{x^2-1} + (-1)^{j+1}\sqrt{|w_m(x)|}\,e^{\frac{i}{2}\arg w_m(x)}}{2(1+(-1)^{m+1}i\sqrt{x^2-1})}$$

$$(m = \overline{1,4}).$$

Нетрудно проверить, что имеют место следующие соотношения:

$$w_2(x) = w_4(x) = \overline{w}_1(x) = \overline{w}_3(x), \; w_1(-x) = w_1(x), \quad (10)$$

$$z_{j2}(x) = z_{j4}(x) = \overline{z}_{j1}(x) = \overline{z}_{j3}(x), \; z_{j1}(-x) = z_{j1}(x). \quad (11)$$

Используя (10), (11), после несложных преобразований формулу (9) можно переписать так:

$$P_{2n,1}(k)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{1}^{R_n}\frac{\operatorname{Im}\left[z_{j1}^{-k+1}(x)\, e^{-\frac{i}{2}\arg w_1(x)}\,\left(x^2-1+i\sqrt{x^2-1}\right)\right]}{x^{2n+1}\sqrt{|w_1(x)|}\,(x^2-1)}\times$$

$$\times\, dx+O(e^{-n^{\delta}})$$

или после подстановки $s=\sqrt[4]{x^2-1}$

$$P_{2n,1}(k)=\frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{\varepsilon_n}\frac{\operatorname{Im}\left[\widetilde{z}_{j1}^{\,-k+1}(s)\;e^{-\frac{i}{2}\arg\widetilde{w}_1(s)}(s^2+i)\right]s}{(1+s^4)^{n+1}\sqrt{|\widetilde{w}_1(s)|}}\,ds+O(e^{-n^{\delta}}),$$

где $0<\varepsilon_n=O(n^{-\frac{1}{8}})$, $\widetilde{z}_{j1}(s)=z_{j1}(\sqrt{1+s^4})$, $\widetilde{w}_1(s)=w_1(\sqrt{1+s^4})$.

Очевидно, что

$$P_{2n,1}(k)=\frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{\varepsilon_n'}\frac{\operatorname{Im}\left[\widetilde{z}_{j1}^{\,-k+1}(s)\;e^{-\frac{i}{2}\arg\widetilde{w}_1(s)}\;(s^2+i)\right]s}{(1+s^4)^{n+1}\sqrt{|\widetilde{w}_1(s)|}}\,ds+O(e^{-n^{\delta}}),\tag{12}$$

где $0<\delta'<1$, $\quad 0<\varepsilon_n'=O(n^{-\frac{1}{6}})$.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в справедливости следующих разложений:

$$\frac{1}{\sqrt{|\widetilde{w}_1(s)|}}=\frac{1}{s\sqrt{s^{12}+2s^8+17s^4+16}}=\frac{1}{s}\left[\frac{1}{2}+O(s^4)\right],\tag{13}$$

$$\sqrt{|\widetilde{w}_1(s)|}=s\,[2+O(s^4)],\tag{14}$$

$$(1+s^4)^{-(n+1)}=e^{-ns^4}\,(1+O(s^4+ns^8)),\tag{15}$$

$$\arg\widetilde{w}_1(s)=-\pi+\operatorname{arctg}\,\frac{4+4s^4}{s^2-s^6}=-\frac{\pi}{2}-\frac{s^2}{4}+O(s^3),\tag{16}$$

$$e^{\frac{i}{2}\arg\widetilde{w}_1(s)}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)+O(s^2),\tag{17}$$

$$\widetilde{z}_{j1}^{\,-k+1}(s)=e^{k(-1)^j\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,s}\left(1+(-1)^{j+1}\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,s+O(s^2+ks^3)\right),\tag{18}$$

где $0\leqslant s\leqslant\varepsilon_n'$.

Подставляя разложение (13) — (18) в (12) и собирая члены с одинаковыми степенями s, получим

$$P_{2n,1}(k)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\varepsilon_n'}e^{-ns^4+(-1)^j\frac{ks}{\sqrt{2}}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ks}{\sqrt{2}}(-1)^j\right)+s(-1)^j\times\right.$$

$$\left.\times\sin\left(\frac{ks(-1)^j}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{2}\right)+O(s^2+ks^3)\right]ds+O(e^{-n^{\delta'}})$$

или после подстановки $x = (2n)^{\frac{1}{4}} s$

$$P_{2n,1}(k) = \frac{2}{\pi (2n)^{\frac{1}{4}}} \int\limits_0^{\varepsilon_n' n^{1/4}} e^{-\frac{x^4}{2} + (-1)^j \frac{kx}{(8n)^{1/4}}} \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{kx}{(8n)^{1/4}} (-1)^j\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{x}{(2n)^{\frac{1}{4}}} (-1)^j \sin\left(\frac{kx(-1)^j}{(8n)^{1/4}} - \frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{x^2}{(2n)^{\frac{1}{2}}}\right) + \frac{kx^3}{(2n)^{\frac{3}{4}}}\right)\right] dx +$$

$$+ O(e^{-n^{\delta'}}) = \frac{2}{\pi (2n)^{\frac{1}{4}}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{x^4}{2} - \frac{|k| x}{(8n)^{1/4}}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{|k| x}{(8n)^{\frac{1}{4}}}\right) dx +$$

$$+ \frac{2}{\pi (2n)^{\frac{1}{2}}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{x^4}{2} - \frac{|k| x}{(8n)^{1/4}}} \left[x(-1)^{j+1} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{|k| x}{(8n)^{1/4}}\right) dx + O\ (2n)^{-\frac{3}{4}} \right],$$

где $j = 1$ при $k > 0$ и $j = 2$ при $k < 0$.

Таким образом, мы получили первые два члена асимптотического разложения вероятности $P\ \{\eta_{2n,1} = k\}$. Нахождение последующих членов асимптотики не вызывает принципиальных затруднений, а связано лишь с более громоздкими выкладками.

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую благодарность А. В. Скороходу за ценные советы и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Л. Добрушин, Две предельные теоремы для простейшего случайного блуждания по прямой, УМН, т. X, вып. 3(65), 1955.

Поступила 17.III 1970 г.
Институт математики АН УССР