УДК 517.948.34

Об усреднении систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений на бесконечном интервале

Т. В. Меликидзе

Данная статья посвящена обобщению второй теоремы Н. Н. Боголюбова об усреднении на бесконечном временном интервале на случай системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений и рассмотрению их решений в окрестности периодического решения усредненных уравнений.

Рассмотрим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных следующего вида:

$$\dot{x}(t) = \varepsilon f\left(t, x(t), \dot{x}(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s), \dot{x}(s))\, ds\right), \tag{1}$$

где ε — малый параметр, t — время, $f(t, x, y, z)$ — вектор-функция, непрерывная в области

$$G: \begin{cases} z \in E_n \text{ — } n\text{-мерное евклидово пространство}, \\ x, y \in E \text{ — компактное множество из } E_n, \\ t \in R \equiv (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Функция $\varphi(t, s, x, y)$ непрерывна в области

$$g: \{(t, s) \in R,\ x, y \in E\}.$$

Пусть для системы (1) выполняются следующие условия.

1. В области G функция $f(t, x, y, z)$ ограничена, удовлетворяет условию Липшица:

$$\text{а)}\quad |f(t, x, y, z)| \leqslant M, \quad |f(t, x', y', z') - f(t, x'', y'', z'')| \leqslant \lambda \{|x' - x''| + |y' - y''| + |z' - z''|\}, \tag{2}$$

где M, λ — const;

б) $f(t, x, y, z)$ имеет непрерывные и равномерно ограниченные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

2. Функция $\varphi(t, s, x, y)$ в области g тоже ограничена и удовлетворяет условию Липшица

$$|\varphi(t, s, x, y)| \leqslant N, \quad |\varphi(t, s, x', y') - \varphi(t, s, x'', y'')| \leqslant \beta \{|x' - x''| + |y' - y''|\}, \tag{3}$$

, β — положительные постоянные.

3. Равномерно относительно $(t, x, y) \in R \times E$ существует предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f\left(t, x, y, \int_0^t \varphi(t, s, x, y)\, ds\right) dt = f_0(x, y). \tag{4}$$

Следуя результатам работы [1], одновременно с системой (1) будем рассматривать усредненную систему

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon f_0\left(\xi, \frac{d\xi}{dt}\right). \tag{5}$$

Предположим, что усредненное уравнение (5) имеет периодическое решение

$$x = \xi(\omega\tau), \tag{6}$$

где $\xi(\varphi)$ — периодическая функция φ с периодом 2π.

Тогда уравнения в вариациях (с точности до величины порядка ε), соответствующие периодическому решению (6), имеют вид

$$\frac{d\delta\xi}{d\tau} = f'_{0x}\left[\xi(\omega\tau), \frac{d\xi}{dt}\right]\delta\xi. \tag{7}$$

На основании теорем Флоке — Ляпунова о свойствах линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами уравнения (7) посредством некоторого преобразования могут быть приведены к системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\delta u_0}{d\tau} = 0, \frac{d\delta u_k}{d\tau} = \sum_{q=1}^{n-1} H_{kq}\delta u_q \quad (k = 1, \ldots, n-1). \tag{8}$$

Корни уравнения

$$\det|pI_{kq} - H_{kq}| = 0, \quad I_{kq} = \begin{cases} 1, & k = q, \\ 0, & k \neq q \end{cases} \tag{9}$$

являются характеристическими показателями для системы (7).

При выполнении указанных выше условий справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть для интегро-дифференциального уравнения*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon f\left(t, x(t), \dot{x}(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s), \dot{x}(s))\, ds\right),$$

кроме приведенных выше условий 1—3, *выполнены также следующие условия*:

1. *Уравнение первого приближения*

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon f_0\left(\xi, \frac{d\xi}{dt}\right), \tag{10}$$

где

$$f_0\left(\xi, \frac{d\xi}{dt}\right) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f\left(t, x(t), y(t), \int_0^t \varphi(t, s, x, y)\, ds\right) dt$$

имеет периодическое решение

$$\xi = \xi(\omega\tau), \quad \xi(\varphi + 2\pi) = \xi(\varphi). \tag{11}$$

2. *Вещественные части всех* $(n-1)$ *характеристических показателей для уравнений в вариациях*

$$\frac{d\delta\xi}{d\tau} = f'_{0x}[\xi(\omega\tau), \xi(\omega\tau)]\,\delta\xi, \tag{12}$$

соответствующих периодическому решению (11), *отличны от нуля.*

3. *Можно найти такую* ρ-*окрестность* U_ϱ *орбиты этого периодического решения, что функция* $f(t, x, y, z)$ *и ее частные производные по* x, y, z *до* $m+1$-*го порядка включительно будут ограничены и равномерно непрерывны по отношению к* x, y *в области*

$$-\infty < t < \infty, \; x, y \in U_\varrho \subset E. \tag{13}$$

4. $f(t, x, y, z)$ — *почти периодическая функция* t *равномерно по отношению к* $x, y \in U_\varrho$.

Тогда можно указать такие положительные числа $\varepsilon', \sigma_0, \sigma_1$ $(\sigma_0 < \sigma_1 < \varrho)$, *что при любом положительном* $\varepsilon < \varepsilon'$ *будут справедливы следующие утверждения:*

1) *уравнение* (1) *имеет единственное интегральное многообразие* S_t, *лежащее для всех вещественных* t *в области* U_ϱ;

2) S_t *допускает параметрическое представление вида*

$$x = \mathbf{F}(t, \theta), \tag{14}$$

где $\mathbf{F}(t, \theta)$ *определена для всех вещественных* t, θ *и обладает периодом* 2π *по отношению к угловому аргументу* θ. *При этом можно найти такие функции* $\delta(\varepsilon)$, $\eta(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *что*

$$|\mathbf{F}(t, \theta) - \xi(\theta)| \leqslant \delta(\varepsilon), \ |\mathbf{F}(t, \theta') - \mathbf{F}(t, \theta'')| \leqslant \eta(\varepsilon)|\theta' - \theta''| \tag{15}$$

для любых вещественных t, θ', θ''.

Можно построить функцию $F(t, \theta)$, *определенную для всех вещественных* t, θ, *обладающую неравенством:*

$$|F(t, \theta)| \leqslant \delta^*(\varepsilon), \ |F(t, \theta') - F(t, \theta'')| \leqslant \eta^*(\varepsilon)|\theta' - \theta''|, \tag{16}$$

где $\delta^*(\varepsilon)$, $\zeta^*(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *таким образом, что всякое решение уравнения* (1), *принадлежащее к многообразию* S_t, *представимо в виде*

$$x = \mathbf{F}(t, \theta(t)), \tag{17}$$

где $\theta(t)$ — *некоторое решение уравнения*

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon F(t, \theta); \tag{18}$$

3) *пусть* $x(t)$ *представляет любое решение уравнения* (1), *удовлетворяющее при некотором* t_0 *соотношению вида:*

$$x(t_0) \in U_{\sigma_0}.$$

Тогда, если вещественные части всех $n - 1$ *характеристических показателей системы* (7) *отрицательны, расстояние* $\rho\{x(t), S_t\}$ *точки до множества* S_t *экспоненциально стремится к нулю при* $t \to \infty$.

Доказательство этой теоремы проводится согласно схеме, изложенной в работе [2], и будет нами приведено в другой статье.

Заметим, что особый интерес представляет важный случай, когда функции $\mathbf{F}(t, \theta)$ и $F(t, \theta)$ являются периодическими по t с периодом T, не зависящим от θ.

Этот случай применительно к нашей исходной системе интегро-дифференциальных уравнений (1) заслуживает специального рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Филатов, Усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях, «Фан», Ташкент, 1967.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.

Поступила 10.I 1970 г.
Институт математики АН УССР