УДК 519.21

Диффузия со случайными параметрами

Л. В. Сергеева, Н. И. Тетерина

1°. Рассматривается стохастическое уравнение*

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, \xi(s), z(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} b(s, \xi(s), z(s))\, dw(s), \tag{1}$$

где $z(s)$ — марковский процесс с конечным числом состояний $\{1, 2, \ldots, n\}$; $\xi(t_0) = \xi_0$ — случайная величина, не зависящая от процессов $z(s)$, $w(s) - w(t_0)$, $s \in [t_0, T]$, а для коэффициентов $a(t, x, k)$, $b(t, x, k)$ считаем выполненными следующие условия:

при каждом k они являются измеримыми функциями пары (t, x), непрерывны по первому аргументу и

$$\begin{gathered} |a(t, x, k)|^2 + |b(t, x, k)|^2 \leqslant \alpha + \beta |x|^2, \\ |a(t, x, k) - a(t, y, k)|^2 + |b(t, x, k) - b(t, y, k)|^2 \leqslant C|x - y|^2. \end{gathered} \tag{2}$$

Под решением уравнения (1) понимаем процесс $\xi(t)$**, измеримый относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}_t$:

$$\mathfrak{F}_t = \sigma\{w(s) - w(t_0);\ t_0 < s \leqslant t;\ \xi(t_0);\ z(s),\ s \in [t_0, t]\},$$

для которого (1) имеет место при каждом $t \in [t_0, T]$ с вероятностью 1.

В этих предположениях методами общей теории стохастических уравнений можно показать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $M|\xi(t_0)|^2, < \infty$, *то существует решение* (1), *единственное в смысле стохастической эквивалентности. Двумерный процесс* $\{\xi(t),\ z(t)\}$ *является марковским.*

В доказательстве существования используется последовательность сжимающих операторов, по которым можно построить аппроксимацию решения со сходимостью в среднеквадратичном.

2°. Справедливы следующие две теоремы о свойствах распределений процесса $\{\xi(t), z(t)\}$. Если $P_{ij}(t, x, s, A) = P\{\xi(s) \in A, z(s) = j / \xi(t) = x, z(t) = i\}$ — его переходные вероятности, то следует такая теорема.

Теорема 2. *Процесс* $\{\xi(t), z(t)\}$ *является диффузионным, т. е. выполняются условия:*

для любого x, $\varepsilon > 0$, *равномерно по* $t < s$:

$$\begin{gathered} \int_{|x-y|>\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} P_{ik}(t, x, s, dy) = o(s - t), \\ \int_{|x-y|\leqslant\varepsilon} (x - y) \sum_{k=1}^{n} P_{ik}(t, x, s, dy) = a_i(t, x)(s - t) + o(s - t), \\ \int_{|x-y|\leqslant\varepsilon} (x - y)^2 \sum_{k=1}^{n} P_{ik}(t, x, s, dy) = b_i(t, x)(s - t) + o(s - t). \end{gathered} \tag{3}$$

Теорема 3. *Если* $\varphi(x, z(\cdot))$ — *непрерывная, ограниченная функция, имеющая непрерывные, ограниченные производные до второго порядка включительно, то функции*

$$u(t, x, i) = M_{t,x,i}\varphi(\xi(s), z(s)) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

---

* Это уравнение является непосредственным обобщением уравнения Ито [1].

** Такие процессы используются в [2].

удовлетворяют системе:

$$-\frac{\partial u(t, x, i)}{\partial t} = a_i(t, x)\frac{\partial u(t, x, i)}{\partial x} + \frac{1}{2} b_i(t, x)\frac{\partial^2 u(t, x, i)}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^{n} u(t, x, k)\, c_{ik}(t)$$

и (4)

$$\lim_{t \uparrow s} u(t, x, i) = \varphi(x, i); \tag{5}$$

здесь $c_{ik}(t) = \left.\frac{\partial P_{ik}(t, s)}{\partial t}\right|_{s=t}$, $P_{ik}(t, s)$ — *переходные вероятности процесса* $z(t)$.

Доказательство этого утверждения опирается на теорему о производных неявной функции, с помощью которой можно доказать дифференцируемость решения уравнения (1) по начальным данным [3]. Затем можно использовать формулу Ито. Можно доказать это иначе, используя условия диффузионности.

3°. Пусть $t \in [0, 1]$; $\Delta = \Delta(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ — разбиение этого отрезка: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$.

Определим случайное блуждание:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \xi_0 + a(t_0, \xi_0, z_0)\,\Delta t_0 + b(t_0, \xi_0, z_0)\,\Delta w_0,\\
\xi_2 &= \xi_1 + a(t_1, \xi_1, z_1)\,\Delta t_1 + b(t_1, \xi_1, z_1)\,\Delta w_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\xi_n &= \xi_{n-1} + a(t_{n-1}, \xi_{n-1}, z_{n-1})\,\Delta t_{n-1} + b(t_{n-1}, \xi_{n-1}, z_{n-1})\,\Delta w_{n-1}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь ξ_0 — заданная случайная величина с $M|\xi_0|^2 < \infty$; $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$; $\Delta w_k = w(t_{k+1}) - w(t_k)$; $z_k = z(t_k)$. По этому блужданию можно построить процесс:

$$\xi_\Delta(t) = \xi_\mu + a(t_\mu, \xi_\mu, z_\mu)(t - t_\mu) + b(t_\mu, \xi_\mu, z_\mu)[w(t) - w(t_\mu)] \tag{7}$$

при $t_\mu \leqslant t < t_{\mu+1}$.

Теорема 4. *Для любого* $t \in [0, 1]$ *существует в смысле среднеквадратичного предел*

$$\xi(t) = \underset{\varrho(\Delta)\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\, \xi_\Delta(t) \quad \left(\varrho(\Delta) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta t_{k-1}\right),$$

который будет решением уравнения (1).

Такого типа построение было проделано в [4].

В заключение авторы выражают благодарность Ю. Л. Далецкому, поставившему данную задачу и оказавшему помощь в ее решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, «Наука», М., 1965.
2. А. Н. Ширяев, О стохастических уравнениях в теории условных марковских процессов, Теория вероятностей и ее применения, т. XI, вып. 1, 1966.
3. Ю. Л. Далецкий, Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения, УМН, т. XXII, вып. 4 (136), 1967.
4. Г. Маруяма, Непрерывные марковские процессы и стохастические уравнения, Математика, 1 : 2, 1957.

Поступила 3.VII 1968 г.

Киевский государственный университет,
Киевский политехнический институт