УДК 517.948.34

О существовании и свойствах почти периодического решения систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве в окрестности точки равновесия

Т. В. Меликидзе

Рассмотрим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f\left(t, x(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds\right) \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, элементами которого являются совокупности функций

$$\{x_1(t), \ldots, x_n(t), \ldots\} = x,$$

удовлетворяющих в любой момент времени $t = \bar{t}$ условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2(\bar{t}) < \text{const}.$$

Норма элемента $x = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ в пространстве $\mathcal{H}$ вычисляется по формуле

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^2}.$$

В уравнении (1) $f(t, x(t), y(t))$, $x(t)$, $y(t)$, $\varphi(t, s, x(s))$ — вектор-функции со значениями в координатном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Следуя результатам работы [1], одновременно с системой (1) рассмотрим усредненную систему

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon f_0(\xi), \tag{2}$$

где

$$f_0(\xi) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f\left(t, x(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds\right) dt.$$

Для упрощения выкладок норму элемента x в пространстве $\mathcal{H}$ обозначим через $|x|$, а норму оператора A — через $|A|$.

Предположим теперь, что выполняются следующие условия:

1) уравнение (2) имеет статистическое решение

$$\xi = \xi_0, \qquad f_0(\xi_0) = 0,$$

соответствующее точке равновесия;

2) оператор $H = \left(\dfrac{\partial f_0(\xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0}$ является ограниченным оператором в пространстве $\mathcal{H}$, удовлетворяющим условию, что абсолютные значения вещественных частей всех точек спектра имеют нижнюю грань, отличную от нуля;

3) в области $-\infty < t < \infty$ $y, x \in D_\varrho$, где D_ϱ — некоторая ϱ-окрестность точки ξ_0, выполняются условия: а) функции $f(t, x, y)$, $\varphi(t, s, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (производная в смысле Фреше) непрерывны и равномерно ограничены; б) $f(t, x, y)$ — почти периодическая функция равномерно по отношению к x, y.

При этих условиях имеют место следующие теоремы.

Л е м м а. *Основное уравнение* (1) *можно путем некоторых замен переменных привести к виду*

$$\dot{h} = \varepsilon H h + Q(\varepsilon, t, h, \int_0^t \varphi(t, s, h(s))\, ds); \tag{3}$$

при этом можно указать такие ε_0 *и* ϱ_1, ϱ_1^*, *что*:

α) *функция* $Q(\varepsilon, t, h, \int_0^t \varphi(t, s, h(s))\, ds)$ *определена в области*

$$-\infty < t < \infty, \ h \in U_{\varrho_1}, \ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \ q \in U_{\varrho_1^*},$$

где U_{ϱ_1} — ϱ_1-*окрестность точки* $h = 0$;

β) *для* $-\infty < t < \infty$ *и* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *имеет место неравенство*

$$\left| Q(\varepsilon, t, 0, \int_0^t \varphi(t, s, 0)\, ds) \right| \leqslant M(\varepsilon), \tag{4}$$

где $M(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$;

γ) *для любого положительного* $\sigma < \varrho_1$ *в области*

$$-\infty > t < \infty, \ h', h'' \in U_\sigma; \ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \ q \in U_{\varrho_1^*}$$

имеет место неравенство

$$\left| Q(\varepsilon, t, h', \int_0^t \varphi(t, s, h)\, ds) - Q(\varepsilon, t, h'', \int_0^t \varphi(t, s, h(s))\, ds) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda(\varepsilon, \sigma) |h' - h''|, \tag{5}$$

где $\lambda(\varepsilon, \sigma) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, $\sigma \to 0$.

Т е о р е м а 1. *Если оператор* H *удовлетворяет условию* 2), *а функция* Q — *условиям* α), β), γ), *то можно указать такое положительное* $\bar{\varepsilon}$, *что для каждого положительного* $\varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}$ *уравнение* (3) *имеет решение*

$$h = f(t, \varepsilon), \tag{6}$$

где $|f(t, \varepsilon)| \leqslant D(\varepsilon) < \varrho_1$, *причем* $D(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

В доказательстве этой теоремы приводятся некоторые вопросы из спектральной теории общих линейных операторов [2].

Теорема 2. *Пусть среди точек спектра оператора H имеются точки как с положительными, так и с отрицательными вещественными частями.*

Тогда можно указать такие положительные $\varepsilon^*, \alpha, c, \sigma_0, \sigma_1$ (причем $\sigma_0 < \sigma_1 < \varrho_1$, $\varepsilon^* < \overline{\varepsilon}$), что для каждого $\varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, любого вещественного t_0 в некоторой окрестности U_{σ_0} существует особое многообразие $\mathfrak{M}(t_0, \varepsilon)$ точек $\{h\}$ со свойствами:

1) *если для $t = t_0$ $h_t \in U_{\sigma_0}$, но $h_t \overline{\in} \mathfrak{M}(t_0, \varepsilon)$, то тогда для некоторого $\overline{t} > t$*

$$h_t \overline{\in} U_{\sigma_1}; \tag{7}$$

2) *если для $t = t_0$ $h_t \in \mathfrak{M}(t_0, \varepsilon)$, то тогда для всех $t > t_0$ $h_t \in U_{\sigma_1}$ и*

$$|h_t - f(t, \varepsilon)| \leqslant ce^{-\alpha(t-t_0)} |h_0 - f(t_0, \varepsilon)|, \tag{8}$$

где $h = h_{t_0}$;

3) *если все точки спектра оператора H имеют положительные вещественные части, то многообразие $\mathfrak{M}(t_0, \varepsilon)$ вырождается в точке $h = f(t_0, \varepsilon)$;*

4) *если, наоборот, все точки спектра оператора H с отрицательными вещественными частями, то многообразие $\mathfrak{M}(t_0, \varepsilon)$ совпадает со всей окрестностью U_{σ_0}.*

Теорема 3. *Пусть функция $f(t, x(t), \int\limits_0^t \varphi(t, s, x(s))\,ds)$ в уравнении (1) удовлетворяет условиям 1) — 3).*

Тогда можно указать такие положительные постоянные $\varepsilon^*, \sigma_0', \sigma_1'$ (причем $\sigma_0' < \sigma_1' < \varrho$), что для всякого положительного $\varepsilon \leqslant \varepsilon^*$ справедливы следующие утверждения:

1) *уравнение (1) имеет единственное решение $x = x^*(t)$, определенное на всем интервале $-\infty < t < \infty$, для которого*

$$|x^*(t) - \xi_0| \leqslant \sigma_0'; \tag{9}$$

2) *это решение является в общем случае почти периодическим;*

3) *можно найти такую функцию $\delta(\varepsilon)$, причем $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, что имеет место неравенство*

$$|x^*(t) - \xi_0| \leqslant \delta(\varepsilon); \tag{10}$$

4) *пусть $x(t)$ является любым решением уравнения (1), отличным от $x^*(t)$, удовлетворяющим при некотором $t = t_0$ неравенству вида*

$$|x(t) - \xi_0| < \sigma'. \tag{11}$$

Тогда имеют место утверждения:

α') *если все точки спектра оператора H имеют отрицательные вещественные части, то для всех $t > t_0$*

$$\left.\begin{aligned} &|x(t) - \xi_0| < \sigma', \\ &|x(t) - x^*(t)| \leqslant ce^{-\alpha\varepsilon(t-t_0)}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где c и α — const > 0;

β') *если все точки спектра оператора H с положительными вещественными частями, то можно найти такое $t_1 > t_0$, что*

$$|x(t_1) - \xi_0| > \sigma'; \tag{13}$$

γ') *если спектральное множество оператора H содержит точки как с положительными, так и с отрицательными вещественными частями,* *то в* σ_0'*-окрестности точки* ξ_0 *существует особое точечное многообразие* $\mathfrak{M}(t_0, \varepsilon)$ *такое, что из соотношения*

$$x(t_0) \in \mathfrak{M}(t_0, \varepsilon)$$

вытекает справедливость неравенства (12), *а из соотношения*

$$x(t_0) \overline{\in} \mathfrak{M}(t_0, \varepsilon)$$

следует справедливость неравенства (13).

Доказательство этих теорем, проводимое согласно схеме, изложенной в работах [3, 4], будет нами приведено в другой статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Филатов, Усреднение в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях, «Фан», Ташкент, 1967.
2. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.
3. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
4. З. Ф. Сирченко, Обобщение одной теоремы Н. Н. Боголюбова на случай гильбертова пространства, УМЖ, т. XVI, № 3, 1964.

Поступила 3.VI 1970 г.
Институт математики АН УССР