УДК 517.948+519.55

Тернарная физическая структура ранга (3,2)

Г. Г. Михайличенко

В работе [1] Ю. И. Кулаковым была предложена абстрактная математическая модель отношений между множествами физических объектов. Эта модель, названная теорией физических структур, представляет собой особую метрическую геометрию, построенную на семействе множеств. Для того, чтобы наглядно представить положения теории, рассмотрим частный случай тернарной физической структуры ранга (3,2) на двух множествах $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots, l, \ldots\}$ и $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots, \gamma, \ldots\}$.

Уравнение теории в этом случае строится следующим образом. Пусть прямое произведение $\mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}$ однозначно отображается в множество действительных чисел R:

$$\mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N} \to R, \tag{1}$$

т. е. каждому элементу $(i, k; \alpha) \in \mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}$ сопоставляется число $a_{ik\alpha}$. Элементу $(i, k, l; \alpha, \beta) \in \mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^2$ при этом сопоставляется точка

$$(a_{ik\alpha}, a_{ik\beta}, a_{il\alpha}, a_{il\beta}, a_{kl\alpha}, a_{kl\beta}) \in R^6 \tag{2}$$

в шестимерном арифметическом пространстве R^6.

Подчеркнем, что отображение имеет вид

$$a_{ik\alpha} = a(x_{ik}, y_{i\alpha}, y_{k\alpha}),$$

где $x : \mathfrak{M}^2 \to R$, $y : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$.

Считаем, что на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ отображение (1) реализует тернарную физическую структуру ранга (3, 2), если совокупность точек (2) в R^6 для всех элементов из $\mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^2$ образует пятимерное дифференцируемое многообразие. Для этого должна существовать достаточно гладкая функция

Φ от шести переменных такая, что

$$\forall (i, k, l; \alpha, \beta) \in \mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^2,$$
$$\Phi (a_{ik\alpha}, a_{ik\beta}, a_{il\alpha}, a_{il\beta}, a_{kl\alpha}, a_{kl\beta}) = 0. \tag{3}$$

Можно также сказать, что многообразие задаваемое уравнением (3), определяет физическую структуру.

Предположим однозначную разрешимость уравнения (3) относительно какого-либо аргумента. Соотношение (3), вообще говоря, может иметь место не при любой функции Φ и не для любого отображения (1) и потому представляет собой уравнение особого рода как для функции Φ, так и для отображения (1). Это уравнение назовем уравнением физической структуры.

Две структуры, реализуемые отображениями $(i, k; \alpha) \to a_{ik\alpha}$ и $(i, k; \alpha) \to \to b_{ik\alpha}$, считаются эквивалентными, если $b_{ik\alpha} = \psi (a_{ik\alpha})$, где ψ — некоторая строго монотонная функция.

Теорема. *Всякая тернарная физическая структура ранга (3,2) эквивалентна структуре, реализуемой отображением*

$$(i, k; \alpha) \to b_{ik\alpha} = x_{ik} + y_{i\alpha} - y_{k\alpha}, \tag{4}$$

где $x : \mathfrak{M}^2 \to R$, $y : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$, *и определяемой многообразием*

$$b_{ik\alpha} - b_{ik\beta} - b_{il\alpha} + b_{il\beta} + b_{kl\alpha} - b_{kl\beta} = 0. \tag{5}$$

Возьмем в множестве $\mathfrak{N}$ три произвольных элемента α, β, γ и запишем уравнение (3) для $(i, k, l; \alpha, \gamma)$, $(i, k, l; \beta, \gamma)$ в виде, разрешенном относительно последнего аргумента:

$$a_{kl\gamma} = f (a_{ik\alpha}, a_{ik\gamma}, a_{il\alpha}, a_{il\gamma}, a_{kl\alpha}),$$
$$a_{kl\gamma} = f (a_{ik\beta}, a_{ik\gamma}, a_{il\beta}, a_{il\gamma}, a_{kl\beta}).$$

Полагая $a_{ik\gamma} = a$, $a_{il\gamma} = b$ и

$$\varphi (x, y, z) = f (x, a, y, b, z),$$

получаем один из возможных вариантов записи уравнения структуры

$$\varphi (a_{ik\alpha}, a_{il\alpha}, a_{kl\alpha}) = \varphi (a_{ik\beta}, a_{il\beta}, a_{kl\beta}). \tag{6}$$

Возьмем далее в множестве $\mathfrak{M}$ четыре произвольных элемента i, k, l, m и запишем уравнение (3) для $(i, k, l; \alpha, \beta)$, $(i, k, m; \alpha, \beta)$, $(i, l, m; \alpha, \beta)$, $(k, l, m; \alpha, \beta)$ в виде, разрешенном относительно последнего аргумента:

$$\begin{aligned} a_{kl\beta} &= f (a_{ik\alpha}, a_{ik\beta}, a_{il\alpha}, a_{il\beta}, a_{kl\alpha}),\\ a_{km\beta} &= f (a_{ik\alpha}, a_{ik\beta}, a_{im\alpha}, a_{im\beta}, a_{km\alpha}),\\ a_{lm\beta} &= f (a_{il\alpha}, a_{il\beta}, a_{im\alpha}, a_{im\beta}, a_{lm\alpha}),\\ a_{lm\beta} &= f (a_{kl\alpha}, a_{kl\beta}, a_{km\alpha}, a_{km\beta}, a_{lm\alpha}). \end{aligned} \tag{7}$$

Вводя обозначения $x_1 = a_{il\alpha}$, $x_2 = a_{il\beta}$, $x_3 = a_{im\alpha}$, $x_4 = a_{im\beta}$, $x_5 = a_{lm\alpha}$, $y_1 = = a_{ik\alpha}$, $y_2 = a_{ik\beta}$, $y_3 = a_{kl\alpha}$, $y_4 = a_{km\alpha}$, получаем функциональное уравнение для $f (s, t, u, v, w)$

$$f (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$$
$$= f [y_3, f (y_1, y_2, x_1, x_2, y_3), y_4, f (y_1, y_2, x_3, x_4, y_4), x_5]. \tag{8}$$

Продифференцируем уравнение (8) по переменным x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, обозначая через f_s, f_t, f_u, f_v, f_w частные производные f по соответствующим аргументам. Полученные равенства представляют собой систему шести линейных неоднородных уравнений относительно двух неизвестных

$$f_t\,[y_3, f(y_1, y_2, x_1, x_2, y_3), y_4, f(y_1, y_2, x_3, x_4, y_4), x_5],$$

$$f_v\,[y_3, f(y_1, y_2, x_1, x_2, y_3), y_4, f(y_1, y_2, x_3, x_4, y_4), x_5].$$

Для совместности уравнений необходимо, чтобы каждый определитель третьего порядка расширенной матрицы системы

$$\left\| \begin{matrix} f_s(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & f_u(y_1, y_2, x_1, x_2, y_3) & 0 \\ f_t(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & f_v(y_1, y_2, x_1, x_2, y_3) & 0 \\ f_u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & 0 & f_u(y_1, y_2, x_3, x_4, y_4) \\ f_v(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & 0 & f_v(y_1, y_2, x_3, x_4, y_4) \\ 0 & f_s(y_1, y_2, x_1, x_2, y_3) & f_s(y_1, y_2, x_3, x_4, y_4) \\ 0 & f_t(y_1, y_2, x_1, x_2, y_3) & f_t(y_1, y_2, x_3, x_4, y_4) \end{matrix} \right\| \tag{9}$$

был равен нулю.

Возьмем в матрице (9) определитель, составленный из первых трех строк, и приравняем его к нулю:

$$\begin{vmatrix} f_s(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & f_u(y_1, y_2, x_1, x_2, y_3) \\ f_t(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & f_v(y_1, y_2, x_1, x_2, y_3) \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Условие (10) представляет собой уже функционально-дифференциальное уравнение для $f(s, t, u, v, w)$. Полагая в условии (10)

$$y_1 = a,\ y_2 = b,\ y_3 = c,\ x_1 = s,\ x_2 = t,\ x_3 = u,\ x_4 = v,\ x_5 = w,$$

получаем линейное однородное уравнение в частных производных

$$f_s(s, t, u, v, w)\, h_1(s, t) + f_t(s, t, u, v, w)\, h_2(s, t) = 0,$$

решение которого находится методом характеристик:

$$f(s, t, u, v, w) = \theta\,[h(s, t), u, v, w]. \tag{11}$$

Подставим решение (11) в условие (10), вводя обозначения переменных $x_1 = u,\ x_2 = v,\ y_1 = s,\ y_2 = t,\ y_3 = w$:

$$\begin{vmatrix} h_u(u, v) & \theta_u\,[h(s, t), u, v, w] \\ h_v(u, v) & \theta_v\,[h(s, t), u, v, w] \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Решение уравнения (12) также находится методом характеристик:

$$\theta\,[h(s, t), u, v, w] = \lambda\,[h(s, t), h(u, v), w]. \tag{13}$$

Решение (13) подставим в определитель, составленный из первой, третьей и пятой строк матрицы (9), и приравняем его к нулю. Полагая $y_3 = y_4 = a,\ y_1 = b,\ y_2 = c,\ h(x_1, x_2) = \xi,\ h(x_3, x_4) = \eta,\ x_5 = w$, получаем уравнение для $\lambda(\xi, \eta, w)$

$$\lambda_\xi(\xi, \eta, w)\,\varrho_1(\xi) + \lambda_\eta(\xi, \eta, w)\,\varrho_1(\eta) = 0,$$

решение которого есть

$$\lambda(\xi, \eta, w) = \chi\,[\varrho(\xi) - \varrho(\eta), w].$$

Таким образом, для функции $f(s, t, u, v, w)$ имеем выражение

$$f(s, t, u, v, w) = \chi\,[\psi(s, t) - \psi(u, v), w], \tag{14}$$

где $\psi(s,t) = \varrho[h(s,t)]$.

Решение (14) подставим в уравнение (7):

$$a_{kl\beta} = \chi[\psi(a_{ik\alpha}, a_{ik\beta}) - \psi(a_{il\alpha}, a_{il\beta}), a_{kl\alpha}]$$

или

$$\psi(a_{ik\alpha}, a_{ik\beta}) - \psi(a_{il\alpha}, a_{il\beta}) = \theta(a_{kl\alpha}, a_{kl\beta}). \tag{15}$$

Запишем (15) для $(m, i, k; \alpha, \beta), (m, i, l; \alpha, \beta), (m, k, l; \alpha, \beta)$:

$$\psi(a_{mi\alpha}, a_{mi\beta}) - \psi(a_{mk\alpha}, a_{mk\beta}) = \theta(a_{ik\alpha}, a_{ik\beta}),$$

$$\psi(a_{mi\alpha}, a_{mi\beta}) - \psi(a_{ml\alpha}, a_{ml\beta}) = \theta(a_{il\alpha}, a_{il\beta}),$$

$$\psi(a_{mk\alpha}, a_{mk\beta}) - \psi(a_{ml\alpha}, a_{ml\beta}) = \theta(a_{kl\alpha}, a_{kl\beta}),$$

откуда легко находим, что

$$\theta(a_{ik\alpha}, a_{ik\beta}) - \theta(a_{il\alpha}, a_{il\beta}) + \theta(a_{kl\alpha}, a_{kl\beta}) = 0, \tag{16}$$

а также

$$a_{kl\beta} = \chi_2[\theta(a_{ik\alpha}, a_{ik\beta}) - \theta(a_{il\alpha}, a_{il\beta}), a_{kl\alpha}].$$

С другой стороны, в соответствии с вариантом (6),

$$a_{kl\beta} = \chi_1[\varphi(a_{ik\alpha}, a_{il\alpha}, a_{kl\alpha}), a_{ik\beta}, a_{il\beta}]$$

и потому

$$\chi_2[\theta(x,y) - \theta(s,t), u] = \chi_1[\varphi(x,s,u), y, t], \tag{17}$$

где $x = a_{ik\alpha}, y = a_{ik\beta}, s = a_{il\alpha}, t = a_{il\beta}, u = a_{kl\alpha}$.

Продифференцируем равенство (17) по переменным x, s и разделим один результат на другой:

$$\theta_x(x,y) = -\theta_s(s,t)\,\varphi_x(x,s,u)\,[\varphi_s(x,s,u)]^{-1}. \tag{18}$$

Правая часть равенства (18) не зависит от переменной y, поэтому

$$\theta_{xy}(x,y) = 0,\ \theta(x,y) = \psi(x) + \varphi(y).$$

где $\psi(x)$, $\varphi(y)$ — функции одной переменной.

Уравнение (16) теперь принимает вид

$$\psi(a_{ik\alpha}) - \psi(a_{il\alpha}) + \psi(a_{kl\alpha}) = \varphi(a_{ik\beta}) - \varphi(a_{il\beta}) + \varphi(a_{kl\beta}). \tag{19}$$

Записав уравнение (19) для $(i, k, l; \alpha, \gamma)$, $(i, k, l; \beta, \gamma)$, находим многообразие, определяющее тернарную физическую структуру ранга (3, 2)

$$\psi(a_{ik\alpha}) - \psi(a_{ik\beta}) - \psi(a_{il\alpha}) + \psi(a_{il\beta}) + \psi(a_{kl\alpha}) - \psi(a_{kl\beta}) = 0. \tag{20}$$

Поскольку уравнение (20), задающее многообразие, однозначно разрешимо относительно $a_{kl\beta}$, функция ψ имеет однозначную обратную функцию ψ^{-1} и потому строго монотонна.

Можно получить параметрическое представление отображения (1), реализующего рассматриваемую структуру, если зафиксировать элементы $p \in \mathfrak{M}$, $\delta \in \mathfrak{N}$ и записать уравнение (20) для $(i, k, p; \alpha, \delta)$, введя обозначения

$$(i,k) \to \psi(a_{ik\delta}) = x_{ik},\ (i;\alpha) \to \psi(a_{ip\alpha}) - \psi(a_{ip\delta}) = y_{i\alpha},$$

$$(i,k;\alpha) \to a_{ik\alpha} = \psi^{-1}(x_{ik} + y_{i\alpha} - y_{k\alpha}). \tag{21}$$

Заметим, что функция (21) обращает уравнение (20) при подстановке тождество.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Кулаков, Элементы теории физических структур, Новосибирский государственный университет, 1969.

Поступила 9.IX 1969 г.,
после переработки — 12.III 1970 г.
Новосибирский государственный университет