УДК 517.9

О построении приближенных решений для автономного дифференциально-разностного уравнения второго порядка, описывающего колебательные процессы со значительной силой сопротивления

Ле суан Кан

В этой заметке построим при помощи метода последовательных замен переменных приближенные решения автономного дифференциально-разностного уравнения второго порядка, описывающего колебательные процессы со значительной силой сопротивления. Рассматриваемое нами уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2b_1\frac{dx(t)}{dt}+2b_2\frac{dx(t-\varepsilon\Delta)}{dt}+\omega_1^2x(t)+\omega_2^2x(t-\varepsilon\Delta)=$$

$$=\varepsilon F\left[x(t),\ x(t-\varepsilon\Delta),\ \frac{dx(t)}{dt},\ \frac{dx(t-\varepsilon\Delta)}{dt}\right], \tag{1}$$

где $b_1, b_2, \omega_1, \omega_2, \Delta$ — положительные постоянные, удовлетворяющие условию $\omega_1^2+\omega_2^2>(b_1+b_2)^2$, ε — положительный малый параметр, F — функция, имеющая нужное число производных по всем аргументам в некоторой области их изменения.

Для случая, когда $\Delta=0$, уравнение (1) было рассмотрено Е. П. Поповым и И. П. Пальтовым при помощи обобщения асимптотического метода на случай системы со значительной силой сопротивления [1, 2]. Затем Г. Бояджиев рассмотрел случай системы с медленно изменяющимися параметрами [3]. В данной заметке построим приближенные решения уравнения (1) при помощи обобщения метода последовательных замен переменных [4, 5].

Сначала введем в уравнение (1) новые переменные a и ψ согласно формулам

$$x=ae^{-bt}\cos\psi, \tag{2}$$

$$\frac{dx}{dt}=-ae^{-bt}(b\cos\psi+\omega_0\sin\psi), \tag{3}$$

где $b=b_1+b_2$; $\omega_0=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2-(b_1+b_2)^2}$.

После ряда выкладок для новых переменных a и ψ вместо уравнения (1) получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\varepsilon}{\omega_0}[F_0(ae^{-bt},\psi)e^{bt}\sin\psi+\Delta a((2b_2b^2-2b_2\omega_0^2-\omega_2^2b)\cos\psi\sin\psi+$$

$$+(4b_2b-\omega_2^2)\omega_0\sin^2\psi)]+\varepsilon^2\ldots, \tag{4}$$

$$\frac{d\psi}{dt}=\omega_0-\frac{\varepsilon}{\omega_0}\left[F_0(ae^{-bt},\psi)\frac{e^{bt}}{a}\cos\psi+\Delta((2b_2b^2-2b_2\omega_0^2-\omega_2^2b)\cos^2\psi+\right.$$

$$\left.+(4b_2b-\omega_2^2)\omega_0\cos\psi\sin\psi)\right]+\varepsilon^2\ldots,$$

где

$$F_0(ae^{-bt},\psi)=F[ae^{-bt}\cos\psi,\ ae^{-bt}\cos\psi,\ -ae^{-bt}(b\cos\psi+\omega_0\sin\psi),$$

$$-ae^{-bt}(b\cos\psi+\omega_0\sin\psi)].$$

Произведем теперь в системе (4) замену переменных

$$a = ce^{bt}, \;\; \psi = \psi. \tag{5}$$

Тогда для новых переменных c, ψ вместо системы (4) получаем систему уравнений

$$\frac{dc}{dt} = -bc - \frac{\varepsilon}{\omega_0}[F_0(c, \psi)\sin\psi + \Delta c\,((2b_2b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2 b)\cos\psi\sin\psi +$$

$$+ (4b_2b - \omega_2^2)\,\omega_0\sin^2\psi)] + \varepsilon^2\ldots,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{\omega_0}\left[\frac{1}{c}F_0(c, \psi)\cos\psi + \Delta\,((2b_2b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2 b)\cos^2\psi +\right.$$

$$\left. + (4b_2b - \omega_2^2)\,\omega_0\cos\psi\sin\psi)\right] + \varepsilon^2\ldots \tag{6}$$

Сделаем в системе уравнений (6) опять замену переменных согласно формулам

$$c = c_1 - \frac{\varepsilon}{\omega_0}u(c_1, \psi_1), \quad \psi = \psi_1 - \frac{\varepsilon}{\omega_0}v(c_1, \psi_1), \tag{7}$$

в которых положено

$$u(c_1, \psi_1) = -\frac{1}{b}\sum_{n\neq 0}\left(c_1^{\frac{in\omega_0}{b}+1}\int g_n(c_1)\,c_1^{-\frac{in\omega_0}{b}-2}dc_1\right)e^{in\psi_1} -$$

$$-\frac{\Delta c_1}{8\omega_0}\{[(2b_2b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2 b) - i\,(4b_2b - \omega_2^2)\,\omega_0]\,e^{i2\psi_1} + [(2b_2b^2 -$$

$$- 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2 b) + i\,(4b_2b - \omega_2^2)\,\omega_0]\,e^{-i2\psi_1}\},$$

$$v(c_1, \psi_1) = -\frac{1}{b}\sum_{n\neq 0}\left(c_1^{\frac{in\omega_0}{b}}\int h_n(c_1)\,c_1^{-\frac{in\omega_0}{b}-2}dc_1\right)e^{-in\psi_1} -$$

$$-\frac{\Delta}{8\omega_0}\{[(4b_2b - \omega_2^2)\,\omega_0 + i\,(2b_2b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2 b)]\,e^{i2\psi_1} + [(4b_2b - \omega_2^2)\,\omega_0 -$$

$$- i\,(2b_2b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2 b)]\,e^{-i2\psi_1}\}, \tag{8}$$

где

$$g_n(c_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_0(c_1, \psi_1)\,\sin\psi_1 e^{-in\psi_1}d\psi_1,$$

$$h_n(c_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_0(c_1, \psi_1)\cos\psi_1 e^{-in\psi_1}d\psi_1.$$

Тогда после ряда выкладок для новых переменных c_1, ψ_1 вместо системы уравнений (6) получаем систему уравнений

$$\frac{dc_1}{dt} = -bc_1 - \frac{\varepsilon}{\omega_0}\left[g_0(c_1) + \frac{\Delta c_1}{2}(4b_2b - \omega_2^2)\,\omega_0\right] + \varepsilon^2\ldots,$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{\omega_0}\left[\frac{h_0(c_1)}{c_1} + \frac{\Delta}{2}(2b_2b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2 b)\right] + \varepsilon^2\ldots \tag{9}$$

Очевидно, что пренебрегая в правых частях уравнений (9) величинами порядка малости ε^2, получим систему уравнений первого приближения

$$\frac{dc_1}{dt} = -bc_1 - \frac{\varepsilon}{\omega_0}\left[g_0(c_1) + \frac{\Delta c_1}{2}(4b_2b - \omega_2^2)\,\omega_0\right],$$
$$\frac{d\psi_1}{dt} = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{\omega_0}\left[\frac{h_0(c_1)}{c_1} + \frac{\Delta}{2}(2b_2b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2 b)\right], \tag{10}$$

правые части которой не зависят от ψ_1.

Короче говоря, в первом приближении мы можем сводить при помощи метода последовательных замен переменных интегрирование уравнения (1) к интегрированию двух уравнений (10). Очевидно, что интегрирование уравнений (10) во много раз легче, чем интегрирование непосредственно уравнения (1) и может быть сведено к квадратурам.

Таким образом, в первом приближении решение уравнения (1) имеет вид

$$x(t) = c_1\cos\psi_1 - \frac{\varepsilon}{\omega_0}\left[u(c_1,\psi_1)\cos\psi_1 - c_1 v(c_1,\psi_1)\sin\psi_1\right], \tag{11}$$

где $u(c_1,\psi_1)$, $v(c_1,\psi_1)$ принимают вид (8); c_1, ψ_1 определяются уравнениями первого приближения (10). Совершенно аналогично принимая во внимание слагаемые порядка малости ε^2 включительно в уравнениях (9), произведя замену переменных

$$c_1 = c_2 - \frac{\varepsilon^2}{\omega_0}u_1(c_2,\psi_2), \quad \psi_1 = \psi_2 - \frac{\varepsilon^2}{\omega_0}v_1(c_1,\psi_1) \tag{12}$$

и пренебрегая в правых частях преобразованных уравнений величинами порядка малости ε^3, получим систему уравнений второго приближения.

В качестве примера найдем первое приближение решения уравнения второго порядка с запаздыванием следующего вида:

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega^2 x(t - \varepsilon\Delta) = \varepsilon\beta\left[1 - \gamma x^2(t)\right]\dot{x}(t - \varepsilon\Delta), \tag{13}$$

где δ, ω, β, γ, Δ — положительные постоянные, удовлетворяющие условию $\omega^2 > \delta^2$; ε — положительный малый параметр. Для случая, когда $\delta = 0$, уравнение (13) было рассмотрено В. П. Рубаником и Ю. А. Митропольским [6, 7]. Согласно рассуждениям изложенного, после ряда выкладок находим первое приближение решения уравнения (13)

$$x(t) = c_1\cos\psi_1 - \frac{\varepsilon}{4\omega_0}\left[\left(\beta - \frac{\beta\gamma\omega_0^2c_1^2}{4(\omega_0^2+\delta^2)} + \frac{\Delta\omega^2}{2}\right)\frac{3\delta c_1}{2\omega_0}\cos\psi_1 + \left(\frac{5}{2}\beta - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{\beta\gamma c_1^2(2\omega_0^2 + 3\delta^2)}{2(\omega_0^2+\delta^2)} + \Delta\omega^2\right)c_1\sin\psi_1 - \frac{\delta\beta\gamma\omega_0 c_1^3}{4(4\omega_0^2+\delta^2)}\cos 3\psi_1 +$$
$$\left. + \left(\beta\gamma c_1^2 - \frac{3}{2}\beta - \frac{\beta\gamma c_1^2(2\omega_0^2+\delta^2)}{4(4\omega_0^2+\delta^2)}\right)c_1\sin 3\psi_1\right], \tag{14}$$

c_1, ψ_1 определяются выражениями вида

$$c_1 = \frac{\sqrt{\delta - \frac{\varepsilon}{2}(\beta + \Delta\omega^2)}\;(c_0e^t)^{-\delta + \frac{\varepsilon}{2}(\beta+\Delta\omega^2)}}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon\beta\gamma}{8}(c_0e^t)^{-2\delta+\varepsilon(\beta+\Delta\omega^2)}}}$$

$$\psi_1 = \left[\omega_0 + \frac{\varepsilon\delta}{2\omega_0}(\beta + \Delta\omega^2)\right] t - \frac{3\delta}{2\omega_0} \ln\left[1 - \frac{\varepsilon\beta\gamma}{8}(c_0 e^t)^{-2\delta+\varepsilon(\beta+\Delta\omega^2)}\right] + \psi_0, \quad (15)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$; c_0, ψ_0 — постоянные интегрирования.

Автор искренне благодарит Ю. А. Митропольского за постановку задачи и постоянное внимание при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. П. Попов, Одно обобщение асимптотического метода Н. Н. Боголюбова в теории нелинейного колебания, ДАН СССР, т. 111, № 2, 1956.
2. Е. П. Попов и И. П. Пальтов, Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, М., 1960.
3. Г. Бояджиев, Годишник на висшите технически учебни заведения, Математика, кн. 2, т. 3, 1970.
4. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний, Изд-во АН УССР, 1934.
5. Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, «Наука», М., 1964.
6. В. П. Рубаник, Применение асимптотического метода Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова к квазилинейным дифференциально-разностным уравнениям, УМЖ, т. XI, № 4, 1959.
7. Ю. А. Митропольский, Лекции по методу усреднения в нелинейной механике, «Наукова думка», К., 1966.

Поступила 10.V 1971 г.
Институт математики АН УССР

УДК 519.55

Об одном комбинированном приближенном методе

А. Е. Мартынюк

Основной целью данной работы является изложение и обоснование нового комбинированного приближенного метода для линейного операторного уравнения

$$Au - \lambda Ku = f, \ D(K) \supset D(A), \ f \in H, \quad (1)$$

с положительно определенным в обобщенном смысле оператором A. При этом основное гильбертово пространство H считаем вещественным и сепарабельным.

Мы называем линейный неограннченный вообще говоря, оператор A с плотной в H областью определения $D(A)$ положительно определенным в обобщенном смысле, если существует такой допускающий замыкание линейный оператор A_α, удовлетворяющий условию $D(A_\alpha) \supset D(A)$, что для любых элементов $u, v \in D(A)$ справедливо равенство

$$(Au, A_\alpha v) = (A_\alpha v, Au) \quad (2)$$

и для каждого $u \in D(A)$ выполняются неравенства

$$(Au, A_\alpha u) \geqslant \gamma^2 \| u \|^2, \ \| A_\alpha u \|^2 \leqslant c^2 (Au, A_\alpha u), \quad (3)$$

где γ, c — положительные постоянные.

Названный оператор впервые введен автором в работах [1 2]. При этом в комплексном H равенство (2) вытекает из (3) [2]. Из (3) следует также ограниченность операторов $A^{-1}, A_\alpha A^{-1}$ и оценка

$$\| A_\alpha A^{-1} \| \leqslant c^2 . \quad (4)$$