УДК 519.214

Об асимптотике распределения времени пребывания простейшего случайного блуждания на положительной полуоси

Р. В. Бойко

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения ± 1 с вероятностями $\frac{1}{2}$. Нас будет интересовать асимптотическое разложение распределения функционала

$$\eta_{n,x} = \sum_{l=0}^{n} f(S_l + x),$$

где $S_0 = 0$, $S_l = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_l$, x — целое число, функция $f(x)$ такая, что $f(x) = 1$ при $x \geqslant 0$ и $f(x) = 0$ при $x < 0$. Нетрудно заметить, что при таком выборе функции $f(x)$ функционал $\eta_{n,x}$ есть время пребывания случайного блуждания, задаваемого последовательностью сумм S_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ на положительной полуоси за n шагов.

Асимптотика распределения функционала $\eta_{n,x}$

$$P_{n,x}(k) = P\{\eta_{n,x} = k\}$$

будет строиться при $k = O(n)$, $\frac{k}{n} < 1$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_{z,\lambda}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^m z^k P_{m,x}(k). \tag{1}$$

Используя формулу полной вероятности, для функции $\varphi_{z,\lambda}(x)$ можно получить конечноразностное уравнение

$$\varphi_{z,\lambda}(x) - z^{f(x)} = \frac{\lambda z^{f(x)}}{2} \varphi_{z,\lambda}(x-1) + \frac{\lambda z^{f(x)}}{2} \varphi_{z,\lambda}(x+1). \tag{2}$$

Решая уравнение (2), получим

$$\varphi_{z,\lambda}(0) = z \frac{\lambda(1-\lambda)(1-\lambda z + \sqrt{1-\lambda^2 z^2}) + (1-\lambda z)(1-\sqrt{1-\lambda^2})(1-\lambda+\sqrt{1-\lambda^2})}{\lambda(1-\lambda)(1-\lambda z)[\sqrt{1-\lambda^2 z^2} - z(1-\sqrt{1-\lambda^2}) + 1]}. \tag{3}$$

Тогда в силу (1) распределение $P_{n,0}(k)$ имеет следующее интегральное представление:

$$P_{n,0}(k)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r_1}\frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\frac{r_2}{r_1}}\varphi_{z,\lambda}(0)\,\frac{dz}{z^{k+1}},\tag{4}$$

где $0<r_1<1,\ 0<r_2<1,\ \frac{r_2}{r_1}<1.$

Используя (3), после несложных преобразований формулу (4) можно переписать так:

$$P_{n,0}(k)=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r_1}\frac{d\lambda}{\lambda^{n+2}}\,\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{(1-\lambda)}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\frac{r_2}{r_1}}\frac{\sqrt{1-\lambda^2z^2}}{(1-\lambda z)}\,\frac{dz}{z^{k+1}};\tag{5}$$

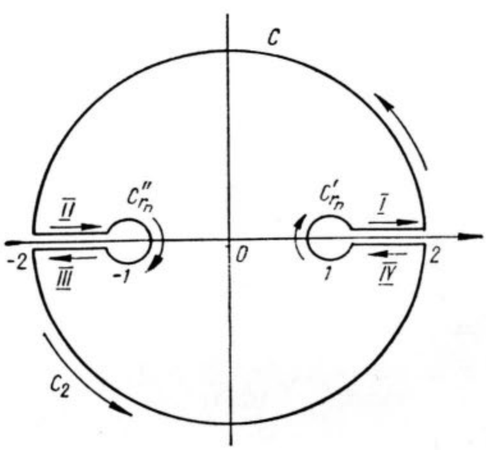
или, после замены переменной во втором интеграле формулы (5) $z=\frac{u}{\lambda}$:

$$P_{n,0}(k)=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r_1}\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{(1-\lambda)}\,\frac{d\lambda}{\lambda^{n+2-k}}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|u|=r_2}\frac{\sqrt{1-u^2}}{(1-u)}\,\frac{du}{u^{k+1}}.\tag{6}$$

Асимптотическое разложение распределения $P_{n,0}(k)$ находим так. Рассмотрим интегралы

$$I_1=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r_1}\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{(1-\lambda)}\,\frac{d\lambda}{\lambda^{n+2-k}};\ \ I_2=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|u|=r_2}\frac{\sqrt{1-u^2}}{(1-u)}\,\frac{du}{u^{k+1}}.\tag{7}$$

Интегралы (7) берутся от тех ветвей подынтегральных функций, для которых $\arg\sqrt{1-\lambda^2}=0$, $\arg\sqrt{1-u^2}=0$ при $0<\lambda<1$, $0<u<1$. Найдем методом перевала (см. [1]) асимптотическое разложение интеграла I_1. Для этого заменим контур интегрирования $|\lambda|=r_1$ контуром C, который состоит из двух окружностей C'_{r_n} и C''_{r_n} радиуса r_n с центрами в точках 1 и -1, окружности C_2 радиуса 2 с центром в точке 0, верхнего I и нижнего IV берегов разреза по действительной оси от $1+r_n$ до 2, верхнего II и нижнего III берегов разреза по действительной оси от $-1-r_n$ до -2 (см. рисунок).



Таким образом,

$$I_1=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{C}\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{(1-\lambda)}\,\frac{d\lambda}{\lambda^{n+2-k}}.$$

Возьмем $r_n=e^{-n}$, тогда в силу малости длин окружностей C'_{r_n}, C''_{r_n} и наличия множителя $\lambda^{-(n+2-k)}$ имеет место следующая оценка:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'_{r_n}+C''_{r_n}+C_2}\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{(1-\lambda)}\,\lambda^{-(n+2-k)}d\lambda\right|=O\left(e^{-n^{\gamma}}\right),$$

где $0<\gamma<1.$

Значит,

$$I_1 = \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{\mathrm{I+II+III+IV}} \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{(1-\lambda)} \frac{d\lambda}{\lambda^{n+2-k}} + O(e^{-n^{\gamma}}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{(x-1)\, x^{n+2-k}}\, dx + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{(1-x)\, x^{n+2-k}}\, dx + O(e^{-n^{\delta}}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{(x^2-1)\, x^{n+2-k}} [x + 1 + (-1)^{n-k}(x-1)]\, dx + O(e^{-n^{\delta}}), \qquad (8)$$

где $0 < \delta < 1$.

Для упрощения выкладок считаем, что n и k — четные, тогда после подстановки в (8) $x = \sqrt{1+u^2}$ получим

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\sqrt{3}} (1+u^2)^{-\frac{n-k+2}{2}} du + O(e^{-n^{\delta}}) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\varepsilon_n} (1+u^2)^{-\frac{n-k+2}{2}} du + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\varepsilon_n}^{\sqrt{3}} (1+u^2)^{-\frac{(n-k+2)}{2}} du + O(e^{-n^{\delta}}) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{n-k+2}{2} \ln(1+u^2)} du + O(e^{-n^{\delta_1}}), \qquad (9)$$

где $0 < \delta_1 < 1$, $0 < \varepsilon_n = O(n^{-\frac{1}{3}})$.

Используя формулу Тейлора, перепишем (9) так:

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{n-k+2}{2}\left(u^2 - \frac{u^4}{2} + O(u^6)\right)} du + O(e^{-n^{\delta_1}}) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{(n-k)u^2}{2}} e^{-u^2 + \frac{u^4}{2} + \frac{(n-k)u^4}{4} + O((n-k)u^6)} du + O(e^{-n^{\delta_1}}) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{(n-k)u^2}{2}} \left(1 - u^2 + \frac{(n-k)\,u^4}{4} + O(u^4 + (n-k)\, u^6)\right) du + O(e^{-n^{\delta_1}}).$$

Производя замену $u = \frac{x}{\sqrt{n-k}}$, получим

$$I_1 = \frac{1}{\pi\sqrt{n-k}} \int\limits_0^{\varepsilon_n\sqrt{n-k}} e^{-\frac{x_2}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{n-k} + \frac{x^4}{4(n-k)} + O\left(\frac{x^4}{(n-k)^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{x^6}{(n-k)^2}\right)\right) dx + O(e^{-n^{\delta_1}}) = \frac{1}{\pi\sqrt{n-k}} \left[\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{x_2}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{n-k} + \frac{x^4}{4(n-k)}\right) dx + \right.$$

$$+ O\left(\frac{1}{(n-k)^2}\right)\Bigg] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-k)}}\left[1 - \frac{1}{4(n-k)}\right] + O\left((n-k)^{-\frac{5}{2}}\right). \quad (10)$$

Аналогично можно получить следующее асимптотическое разложение для I_2:

$$I_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\left(1 - \frac{1}{4k}\right) + O\left(k^{-\frac{5}{2}}\right). \quad (11)$$

Тогда, учитывая (6), (10), (11), получим

$$P_{n,0}(k) = I_1 \cdot I_2 = \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}\left[1 - \frac{n}{4k(n-k)}\right] + O(n^{-3}). \quad (12)$$

Формула (12) дает нам асимптотическое разложение распределения функционала

$$\eta_{n,0} = \sum_{k=0}^{n} f(S_k).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Т. Копсон, Асимптотические разложения, «Мир», М., 1966.

Поступила 23.XII 1970 г.
Институт математики АН УССР