УДК 517.948.35

Гиперболические уравнения с операторными коэффициентами и ультрапараболические системы

Ю. Л. Далецкий, Е. А. Фадеева

1. В этой заметке рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} A_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + B(x) u \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Здесь $u(x)$ — вектор-функция переменной $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ со значениями в $\mathcal{H}$, $A_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n)$ и $B(x)$ определенные в $\mathbf{R}^n$ функции, значениями которых являются операторы в $\mathcal{H}$. Предполагается, что операторы $A_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n)$ эрмитовы и ограничены, а оператор $B(x)$ самосопряжен и полуограничен сверху (без ограничения общности отрицательной постоянной):

$$B(x) < -cI \qquad (c > 0;\ x \in \mathbf{R}^n).$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что область определения D_B оператора $B(x)$ не зависит от x, оператор-функция $B(x)B^{-1}(x_0)$ непрерывна и ограничена, а оператор-функции $A_k(x)$ непрерывны и ограничены вместе со своими первыми производными $(x \in \mathbf{R}^n)$.

Уравнение (1) является бесконечномерным аналогом гиперболической системы дифференциальных уравнений первого порядка. Такие конечномерные системы детально изучены Р. Филлипсом [1]. В бесконечномерном случае появляются новые трудности, связанные с тем, что ни один из операторов $\sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ и B не является подчиненным другому. Тем не менее, общая схема, разработанная Р. Филлипсом для исследования конечномерной системы с неограниченными коэффициентами, оказывается пригодной и в нашем случае. Эта схема связана с рассмотрением максимальных диссипативных операторов в оснащенном гильбертовом пространстве.

Отметим, что уравнение (1) с постоянными операторами A_k, B рассматривалось одним из авторов [2] при помощи преобразования Фурье. Мы рассмотрим ниже и этот случай, освободившись от некоторых, принятых в [2], ограничений.

2. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ вектор-функций $u(x)$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ со значениями из $\mathscr{H}$. Пусть D_0 — линейное множество, состоящее из непрерывно дифференцируемых финитных функций $u(x)$, обладающих тем свойством, что $u(x) \in D_B$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ и $B(x)\ u(x) \in \mathfrak{H}$.

Определим на D_0 оператор

$$L_0 u = \sum_{k=1}^{n} A_k(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} + B(x) u(x).$$

Напомним, что он называется диссипативным, если выполнено условие

$$\operatorname{Re}(L_0 u, u) \leqslant 0 \qquad (u \in D_{L_0}).$$

Простое вычисление показывает, что условием диссипативности оператора L_0 является неравенство

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial A_k}{\partial x_k} + 2B \leqslant 0. \tag{2}$$

Вместе с оператором L_0 диссипативным является и его замыкание $\overline{L}_0$. Более того, при описанных выше условиях имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Оператор $\overline{L}_0$ является максимальным диссипативным оператором.*

Доказательство теоремы 1 намечено в следующем пункте. Поскольку известно (см. [1]), что максимальные диссипативные операторы являются производящими операторами сильно непрерывных полугрупп сжатий, непосредственным следствием теоремы является существование такой полугруппы U_t, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{dU_t f}{dt} = \overline{L}_0 U_t f \qquad (f \in D_{\overline{L}_0}).$$

Вектор-функцию $u(t) = U_t f$ естественно считать обобщенным решением задачи Коши для уравнения (1) с условием $u(0) = f$. Условия гладкости этих обобщенных решений опишем ниже для уравнения с постоянными коэффициентами.

3. Для доказательства теоремы 1 строится оснащенное гильбертово пространство $\mathfrak{H}_+ \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_-$. Это делается при помощи неограниченного самосопряженного положительного оператора T в пространстве $\mathfrak{H}$, определяемого формулой $T = (I - D)^{1/2}$, где

$$(Du)(x) = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial A_k(x)}{\partial x_k} + 2B(x)\right] u(x).$$

Пространство $\mathfrak{H}_-$ представляет собой пополнение $\mathfrak{H}$ по норме $\|u\|_- = \|T^{-1}u\|$, а пространство $\mathfrak{H}_+$ получается из D_T после введения нормы $\|u\|_+ = \|Tu\|$. Скалярное произведение (u, v) в $\mathfrak{H}$ порождает совпадающую с ним на $\mathfrak{H}_+ \times \mathfrak{H}_-$ форму

$$(u_+, v_-) = (Tu_+, T^{-1}v_-).$$

В ортогональной сумме $\mathfrak{H}_\pm = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_-$ вводится индефинитная форма

$$Q(u, v) = (u_+, v_-) + (u_-, v_+) - (\hat{D}u_+, v_+),$$

где $\widehat{D}$ — действующее из $\mathfrak{H}_{+}$ в $\mathfrak{H}_{-}$ замыкание оператора D. Оператор L_0 допускает действующее из $\mathfrak{H}_{+}$ в $\mathfrak{H}_{-}$ расширение $\widehat{L}_0$. Легко проверяется, что график $G(\widehat{L}_0) = \{(u_{+}, u_{-}) : u_{-} = \widehat{L}_0 u_{+}\}$ оператора $\widehat{L}_0$ является Q-нулевым линейным множеством в $\mathfrak{H}_{\pm}$, а график $\widehat{G}(\widehat{L})$ его слабого замыкания $\widehat{L}$ — Q-ортогональным дополнением к $G(\widehat{L}_0)$ в $\mathfrak{H}_{\pm}$.

Существенное место в доказательстве занимает следующий результат, основывающийся на одной идее К. Фридрихса [3].

Лемма. *Слабое замыкание $\widehat{L}$ оператора $\widehat{L}_0$ совпадает с его сильным замыканием $\overline{\widehat{L}}_0$.*

Из этого результата можно вывести, используя установленное в [1] соответствие между максимальными диссипативными в $\mathfrak{H}$ сужениями оператора $\widehat{L}$ и максимальными Q-отрицательными подпространствами из Q-ортогонального дополнения к $G(\widehat{L}_0)$, что существует единственное такое сужение, совпадающее с $\overline{L}_0$.

4. Уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + Bu \tag{3}$$

можно исследовать более точно при помощи преобразования Фурье. При этом можно ослабить требования, налагаемые на самосопряженные операторы A_k, заменив условие их ограниченности условием подчиненности дробной степени оператора B:

$$\| A_k B^{-\gamma} \| < \infty \qquad (0 < \gamma < 1;\ k = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

В этом случае нетрудно представить решения задачи Коши уравнения (3) при помощи формулы

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R_n} e^{(iA(\omega)+B)t + i(x,\omega)} \widetilde{f}(\omega)\, d\omega,$$

где $\tilde{f}(\omega)$ — преобразование Фурье начальной функции $u(x, 0) = f(x)$. Из этой формулы легко получить следующие условия гладкости обобщенного решения.

Теорема 2. *Пусть вектор-функция $Bf(x)$ абсолютно непрерывна и принадлежит $\mathfrak{H}$ вместе со своими частными производными первого порядка. Тогда обобщенное решение $u(x, t) = U_t f(x)$ задачи Коши для уравнения* (3) *имеет непрерывные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, вместе с $u(x, t)$ принадлежащие области D_B.*

Аналогичным образом можно сформулировать результат, касающийся старших производных, если потребовать выполнения условия вида

$$\| BA_k B^{-1-\gamma} \| < \infty \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

5. Изложенные выше результаты могут быть применены к изучению задачи Коши для ультрапараболической системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} a_k(x, y) \frac{\partial u}{\partial x_k} + L_{2p}\left(x, y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u \qquad (p \geqslant 1). \tag{5}$$

Здесь $u(t, x, y)$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \Omega \subset \mathbf{R}^m$ — вектор-функция со значениями в $\mathbf{R}^s$, $a_k(x, y)$ — матричные функции, $L_{2p}\left(x, y, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ — сильно эллиптический полуограниченный сверху дифференциальный оператор по переменной $y \in \Omega$, зависящий от параметра $x \in \mathbf{R}^n$.

Для того, чтобы применить описанную выше схему, нужно рассмотреть гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ функций $u(y)$, интегрируемых в квадрате по области $\Omega \in \mathbf{R}^m$, и в нем операторы $A_k(x)$ умножения на матричные функции $a_k(x, y)$, а также оператор $B(x)$, порождаемый дифференциальным выражением L_{2p} и некоторыми граничными условиями. В случае, когда коэффициенты уравнения (5) не зависят от x, можно при помощи теоремы 2 исследовать гладкость обобщенных решений.

Отметим, что ультрапараболические уравнения второго порядка рассматривались в работах [4—6], где, по-видимому, существенно использовалась неотрицательность фундаментальных решений, нарушающаяся при $p > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. S. Phillips, Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, Trans. of the Amer. Math. Soc., **90**, 1959.
2. Е. А. Фадеева, О задаче Коши для линейного гиперболического уравнения первого порядка с операторными коэффициентами, УМН, т. 22, № 2, 1967.
3. K. O. Friedrichs, Symmetric hyperbolic linear differential equations, Communs Pure and Appl. Math., **7**, 1954, 345—392.
4. А. М. Ильин, Об одном виде ультрапараболических уравнений, ДАН СССР, т. 159, № 6, 1964.
5. Т. Г. Генчев, Об ультрапараболических уравнениях, ДАН СССР, т. 151, № 2, 1963.
6. В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрожжинов, Обобщенная задача Коши для ультрапараболического уравнения, Изв. АН СССР, т. 31, № 6, 1967.

Поступила 20.I 1971 г.
Киевский политехнический институт