УДК 539:126

К вопросу о семействе непараллельных траекторий Редже

В. И. Коломыцев

1. Один из недостатков теоретико-группового подхода к проблеме конспирирования траекторий Редже состоит в том, что полюса в l-плоскости, возникающие из одного полюса Лоренца, приводят к семейству параллельных траекторий [1]. Это является следствием вполне определенных аналитических свойств по переменной l функций $K_N^{-\frac{m}{2}, i\frac{\sigma}{2}}(\varepsilon, l, \rho; j)$, входящих в формулу, которая связывает матричные элементы представлений группы $SL(2C)$, ограниченных на подгруппу $SU(1, 1)$, с матричными элементами неприводимых представлений группы $SU(1, 1)$. Функции $K_N^{-\frac{m}{2}, i\frac{\sigma}{2}}(\varepsilon, l, \rho; j)$ обладают в l-плоскости полюсами, положения которых отличаются друг от друга на целое число $n = 0, 1, 2, \ldots$, не зависящее от параметра σ, характеризующего неприводимые представления группы $SL(2C)$. Именно из-за независимости числа n от σ возникают параллельные траектории.

Сохраняется ли подобная ситуация в отношении аналитических свойств по l у функций, аналогичных функциям $K_N^{-\frac{m}{2}, i\frac{\sigma}{2}}(\varepsilon, l, \rho; j)$, если рассматривать матричные элементы представлений группы G, более широкой, чем группа Лоренца, и включающей в себя как подгруппу последнюю. В частности, в качестве такой группы инвариантности (S-матрицы) можно было бы рассматривать, например, группу $SO(4, 2)$ [2, 3].

Оказывается, в тех случаях, когда неприводимое представление группы G, ограниченное на группу Лоренца, унитарно эквивалентно тензорному произведению представлений, компонентами которого являются либо представления основной серии группы Лоренца, либо регулярное или квазирегулярное, особенностями в l-плоскости соответствующих функций являются полюса, положения которых отличаются друг от друга на целое число, по-прежнему независящее от параметра, характеризующего представление группы G. Поскольку при этом исследование сводится к изучению случая тензорного произведения представлений основной серии группы Лоренца, в следующем пункте ограничиваемся рассмотрением последнего.

Заметим теперь, что к такому классу групп принадлежит и группа $SO(4, 2)$, поскольку ограничение на группу $SO(4, 1)$ ее неприводимого представления является также неприводимым представлением и группы $SO(4, 1)$ [3]. В свою очередь, неприводимое представление основной серии группы $SO(4, 1)$, ограниченное на группу $SO(3,1)$, как легко показать на основании [4] по аналогии с работами [5, 6] для случая группы Лоренца, совпадает с частью регулярного представления. Кроме того, в этом классе содержатся также группы $SL(n, C)$.

Аналогичные утверждения в отношении аналитических свойств справедливы также и для соответствующих функций в случае представлений вещественной унимодулярной группы [7], ограниченных на подгруппу вещественных матриц второго порядка. В этом можно убедиться, если использовать результаты работ [8 и 9] по разложению тензорного произведения представлений группы и регулярного на неприводимые.

Таким образом, для довольно широкого класса групп невозможно построить теоретико-групповую модель, приводящую к семейству непараллельных траекторий Редже.

2. Разложение тензорного произведения двух представлений основной серии S_{m_1,σ_1} и S_{m_2,σ_2} осуществлено в работах Наймарка [10] и Гельфанда и Граева [11]. На основании теоремы 3 работы [10] можно получить следующую формулу, связывающую матричные элементы тензорного произведения представлений с матричными элементами представлений основной серии:

$$Д_{jN,\,j'N'}^{m_1-m_2,\,\sigma_1-\sigma_2}(g)=\sum_{m\in X_0}\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{\infty}(m^2+\sigma^2)\left[1+\Gamma^2(\sigma,\sigma_1-\sigma_2)\right]\mathfrak{D}_{jN,\,j'N'}^{m\sigma}(g)d\sigma, \quad (1)$$

где X_0 — совокупность характеров $\chi(\lambda)=|\lambda|^{-m+i\sigma-2}\lambda^m$ таких, что $m-m_1+$ $+m_2$ есть четное число, $\mathfrak{D}_{jN,j'N'}^{m\sigma}(g)$ — матричные элементы представлений основной серии, а функция $\Gamma(\sigma,\sigma_1-\sigma_2)$ определяется следующим образом:

$$\Gamma(\sigma,\sigma_1-\sigma_2)=\frac{\begin{gathered}\Gamma\left(-\frac{m+m_1-m_2}{4}+\frac{1}{2}-i\,\frac{\sigma+\sigma_1-\sigma_2}{4}\right)\times\\ \times\Gamma\left(\frac{m-m_1+m_2}{4}+\frac{1}{2}-i\,\frac{\sigma-\sigma_1+\sigma_2}{4}\right)\end{gathered}}{\begin{gathered}\Gamma\left(-\frac{m+m_1-m_2}{4}+\frac{1}{2}+i\,\frac{\sigma+\sigma_1-\sigma_2}{4}\right)\times\\ \times\Gamma\left(\frac{m-m_1+m_2}{4}+\frac{1}{2}+i\,\frac{\sigma-\sigma_1+\sigma_2}{4}\right)\end{gathered}}.$$

Полагая в (1) элемент $g=v\in SU(1,1)$ и используя формулу (6.3) работы [5], получаем для матричных представлений, ограниченных на подгруппу $SU(1,1)$, следующую связь:

$$Д_{jN,\,j'N'}^{m_1-m_2,\,\sigma_1-\sigma_2}(v)=\frac{1}{2i}\sum_{\varepsilon,\varrho}\int\limits_{C_{-\frac{1}{2}}}\mathbf{K}_{NN'}^{m_1-m_2,\,\sigma_1-\sigma_2}(\varepsilon,l,\varrho;j,j')\,\eta(\varepsilon,l)\times$$

$$\times D_{NN'}^{\varepsilon l}(v)\,dl+G(v), \quad (2)$$

где

$$\mathbf{K}_{NN'}^{m_1-m_2,\,\sigma_1-\sigma_2}(\varepsilon,l,\varrho;j,j')=\sum_{m\in X_0}\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{\infty}(m^2+\sigma^2)\left[1+\Gamma^2(\sigma,\sigma_1-\sigma_2)\right]\times$$

$$\times K_N^{-\frac{m}{2},\,-i\frac{\sigma}{2}}(\varepsilon,-l-1,\varrho;j)\,K_{N'}^{-\frac{m}{2},\,i\frac{\sigma}{2}}(\varepsilon,l,\varrho;j')\,d\sigma, \quad (3)$$

$G(v)$ обозначает вклад представлений дискретных классов, $D_{NN'}^{\varepsilon l}(v)$—матричные элементы неприводимых представлений группы $SU(1.1)$.

Из представления (3) для функции $\mathbf{K}_{NN'}^{m_1-m_2,\,\sigma_1-\sigma_2}(\varepsilon, l+; j, j')$, принимая во внимание аналитические свойства функций $K_N^{-\frac{m}{2},\, i\frac{\sigma}{2}}(\varepsilon, l, +; j)$ по переменным l и σ [5], можно заключить, что эта функция является мероморфной функцией по переменным l и $\tau = \sigma_1 - \sigma_2$; она имеет полюса в точках

$$l = i\frac{\tau}{2} + n, \quad l = -i\frac{\tau}{2} + n,$$

где n — целое (полуцелое) число, не зависящее от τ.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Cosenza, A. Sciarrino and M. Toller, On the group theoretical approach to the conspiracy problem for arbitrary masses, Nuovo Cimento, **57 A**, 253, 1968.
2. L. Castell, Integral transformations in momentum space and conformal invariance, Journ. Math. Phys., **11**, 2999, 1970.
3. A. O. Barut, A. Böhm, Reduction of a class of O (4,2) representations with respect to SO (4,1) and SO (3,2), Journ. Math. Phys., **11**, 2938, 1970.
4. R. Takahashi, Sur les représentation unitaires des groups de Lorentz généralisés, Bull. Soc. Math. de France, **91**, 289, 1963.
5. A. Sciarrino, M. Toller, Decomposition of the UIR of the group SL (2 C) restricted to the subgroup SU (1,1), Journ. Math. Phys., **8**, 1252, 1967.
6. Б. Д. Ромм, Разложение на неприводимые представления сужения представлений основной серии собственной группы Лоренца на вещественную группу Лоренца, ДАН СССР, т. 152, № 1, 1963.
7. И. М. Гельфанд и М. И. Граев, Унитарные представления вещественной унимодулярной группы, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 17, № 2, 1953.
8. L. Pukansky, On the Kronecker products of IR of the 2 × 2 real unimodular group, Trans. Amer. Math. Soc., **100**, 116, 1961.
9. Б. Д. Ромм, Аналог формулы Планшереля для вещественной унимодулярной группы n-го порядка, Изв. АН СССР, сер. матем. т. 29, № 5, 1965.
10. М. А. Наймарк, Разложение тензорного произведения неприводимых представлений группы Лоренца на неприводимые представления, Труды Моск. матем. об-ва, т. 8, 1959.
11. И. М. Гельфанд и М. И. Граев, Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии, Труды Моск. матем. об-ва, т. 8, 1959.

Поступила 8.VI 1970 г.

Институт математики АН УССР