УДК 517.535.4

# О нижнем индикаторе целой функции нулевого рода с положительными нулями

*А. А. Кондратюк, А. Н. Фридман*

Пусть $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок [1], $\rho(r) \to \rho < 1$ при $r \to \infty$. Через $G(\rho(r))$ обозначим класс целых функций $f(z)$ порядка $\rho < 1$ с положительными нулями, для которых $\rho(r)$ является уточненным порядком.

В статье находится предельное значение нижнего индикатора

$$h(\varphi; f) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}}, \ 0 < \varphi < 2\pi,$$

при $\varphi \to 0$ как функция числа нулей целой функции $f(z) \in G(\rho(r))$.

Пусть $n(r)$ — число нулей функции $f(z)$ на отрезке $[0, r]$.

Т е о р е м а. *Для всякой целой функции $f(z) \in G(\rho(r))$ выполняется*

$$\lim_{\varphi\to 0} h(\varphi; f) = \lim_{\xi\to 1-0} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{r^{\varrho(r)}} \int_0^{\xi} \frac{\frac{n(rt)}{t} - n\left(\frac{r}{t}\right)}{1-t} dt. \tag{1}$$

Эта теорема является обобщением одного результата Э. Байет [2, теорема 1], которая получила формулу (1) в случае $\varrho(r) \equiv \frac{1}{2}$ при условии $\varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r)}{\sqrt{r}} < \infty$ (свой результат Э. Байет формулирует и доказывает для целых функций конечной степени с вещественными нулями).

Отметим одно очевидное следствие из нашей теоремы.

С л е д с т в и е. *Для выполнения неравенства*

$$\inf_{0<\varphi<2\pi} h(\varphi; f) > -\infty \tag{2}$$

*необходимо и достаточно, чтобы*

$$J = \lim_{\xi\to 1-0} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{r^{\varrho(r)}} \int_0^{\xi} \frac{\frac{n(rt)}{t} - n\left(\frac{r}{t}\right)}{1-t} dt > -\infty.$$

И. Ф. Красичков [3] указал другое необходимое и достаточное условие ограниченности нижнего индикатора, т. е. выполнения неравенства (2) в общем случае, которое выражалось в конечности введенного им индекса концентрации нулей. В силу равенства (1) и приведенного выше следствия в случае $f(z) \in G(\rho(r))$ величина $J$ может быть названа точным индексом концентрации нулей функции $f(z)$.

Перейдем к доказательству теоремы, идея которого заимствована у Э. Байет [2].

Не уменьшая общности, можно считать, что $f(0) \neq 0$. Тогда (см., например, [4])

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = \int_0^{\infty} \frac{n(rt)}{t} \frac{1 - t\cos\varphi}{1 - 2t\cos\varphi + t^2} dt =$$

$$= \int_0^{\xi} + \int_{\xi}^{1/\xi} + \int_{1/\xi}^{\infty} = I_1 + I_2 + I_3, \tag{3}$$

где $0 < \xi < 1$. Делая в интеграле $I_3$ замену $t = \frac{1}{\tau}$ и проводя элементарные преобразования, получаем

$$I_1 + I_3 = \int_0^{\xi} \left\{\frac{n(rt)}{t} \frac{1 - t\cos\varphi}{1 - 2t\cos\varphi + t^2} + n\left(\frac{r}{t}\right) \frac{t - \cos\varphi}{1 - 2t\cos\varphi + t^2}\right\} dt =$$

$$= \int_0^{\xi} \frac{\frac{n(rt)}{t} - n\left(\frac{r}{t}\right)}{1-t} dt + \int_0^{\xi} \frac{n\left(\frac{r}{t}\right) - n(rt)}{1-t} \frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}(1+t)}{1 - 2t\cos\varphi + t^2} dt = I_0 + I_4.$$

Тогда

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = I_0 + I_2 + I_4. \tag{4}$$

Пусть $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{4}$ и $\xi = \cos\varphi$. Имеем $I_2 \geqslant 0$, $I_4 \geqslant 0$, так как подынтегральные функции в интегралах $I_2$ и $I_4$ неотрицательны. Следовательно, разделив равенство (4) на $V(r) = r^{\varrho(r)}$ и переходя к нижнему пределу при $r \to \infty$, имеем

$$h(\varphi; f) \geqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{1}{V(r)} \int\limits_0^{\cos\varphi} \frac{\dfrac{n(rt)}{t} - n(rt)}{1-t}\, dt. \tag{5}$$

Заметим, что так как

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left|1 - \frac{re^{i\varphi}}{a_k}\right|,$$

а каждый из членов ряда, стоящего справа, есть возрастающая функция от $\varphi$, то неубывающей является функция $h(\varphi; f)$. Следовательно, существует конечный или равный $-\infty$ предел $\lim\limits_{\varphi\to 0} h(\varphi; f)$. Переходя теперь в неравенстве (5) к верхнему пределу при $\varphi \to 0$, получаем

$$\lim_{\varphi\to 0} h(\varphi; f) \geqslant \varlimsup_{\xi\to 1-0} \varliminf_{r\to\infty} \frac{1}{V(r)} \int\limits_0^{\xi} \frac{\dfrac{n(rt)}{t} - n\left(\dfrac{r}{t}\right)}{1-t}\, dt. \tag{6}$$

Далее оценим $h(\varphi; f)$ сверху. Для интеграла $I_4$ имеет

$$I_4 \leqslant 4\sin^2\frac{\varphi}{2} \int\limits_0^{\xi} \frac{n\left(\dfrac{r}{t}\right) - n(rt)}{(1-t)^3}\, dt \leqslant \frac{4\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}{(1-\xi)^3} \int\limits_0^{\xi} \left[n\left(\frac{r}{t}\right) - n(rt)\right] dt.$$

Как заметил А. А. Гольдберг [4, стр. 171], не уменьшая общности, можно считать, что для всех $r \in (0, \infty)$ выполняется

$$\frac{V(rt)}{V(r)} \leqslant \begin{cases} t^{\varrho+\sigma} & \text{при } 1 \leqslant t < \infty, \\ t^{\varrho-\sigma} & \text{при } 0 < t \leqslant 1, \end{cases} \tag{7}$$

где $0 < \sigma < \min(\varrho, 1-\varrho)$. Отсюда

$$\int\limits_0^{\xi} \left[n\left(\frac{r}{t}\right) - n(rt)\right] dt \leqslant V(r) \int\limits_0^1 \frac{n\left(\dfrac{r}{t}\right)}{V\left(\dfrac{r}{t}\right)} \frac{1}{t^{\varrho+\sigma}}\, dt + V(r) \int\limits_0^1 \frac{n(rt)}{V(rt)}\, t^{\varrho-\sigma}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \Delta V(r) \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{t^{\varrho+\sigma}} + t^{\varrho-\sigma}\right] dt = C_1 V(r),$$

где $\Delta = \sup\limits_{\tau>0} \dfrac{n(\tau)}{V(\tau)}$.

Пусть далее $\xi = 1 - \sqrt{\varphi}$, $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{4}$. Тогда

$$I_4 \leqslant \frac{4\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}{\varphi^{\frac{3}{2}}} C_1 V(r) = \varepsilon_1(\varphi) V(r). \tag{8}$$

Для $I_2$ имеем

$$I_2 = \int_{\xi}^{1} + \int_{1}^{1/\xi} = \int_{\xi}^{1} \frac{n(rt)}{t}\, dt + \int_{\xi}^{1} \left[ n\left(\frac{r}{t}\right) - n(rt) \right] \frac{t - \cos\varphi}{1 - 2t\cos\varphi + t^2}\, dt,$$

и так как $\dfrac{t - \cos\varphi}{1 - 2t\cos\varphi + t^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ при $t \leqslant 1$, то

$$I_2 \leqslant \int_{\xi}^{1} \frac{n(rt)}{t} + \frac{1}{2} \int_{\xi}^{1} \left[ n\left(\frac{r}{t}\right) - n(rt) \right] dt.$$

Используя неравенство (7), находим

$$I_2 \leqslant C_2 (1 - \xi) V(r) = C_2 \sqrt{\varphi} V(r) = \varepsilon_2(\varphi) V(r). \tag{9}$$

Разделив равенство (4) на $V(r)$ и перейдя к нижнему пределу при $r \to \infty$ с учетом (8) и (9), получим

$$h(\varphi; f) \leqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{1}{V(r)} \int_{0}^{1-\sqrt{\varphi}} \frac{\frac{n(rt)}{t} - n\left(\frac{r}{t}\right)}{1 - t}\, dt + \varepsilon_1(\varphi) + \varepsilon_2(\varphi).$$

Так как $\varepsilon_j(\varphi) \to 0$ при $\varphi \to 0$, то из последнего неравенства следует

$$\lim_{\varphi\to 0} h(\varphi; f) \leqslant \varliminf_{\xi\to 1-0} \varliminf_{r\to\infty} \frac{1}{(V)\, r} \int_{0}^{\xi} \frac{\frac{n(rt)}{t} - n\left(\frac{r}{t}\right)}{1 - t}\, dt.$$

Отсюда и из неравенства (6) вытекает равенство (1). Тем самым, доказательство теоремы закончено.

Замечание. Из проведенных рассуждений видно, что если везде вместо $\varliminf\limits_{r\to\infty}$ брать $\varlimsup\limits_{r\to\infty}$, то для индикатора

$$H(\varphi; f) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\varrho(r)}}$$

получим

$$\lim_{\varphi\to 0} H(\varphi; f) = \varliminf_{\xi\to 1-0} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{V(r)} \int_{0}^{\xi} \frac{\frac{n(rt)}{t} - n\left(\frac{r}{t}\right)}{1 - t}\, dt.$$

Последняя формула обобщает один результат П. Коозиса [5, стр. 128].

Авторы выражают признательность А. А. Гольдбергу за полезные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956.
2. A. Baillette, Sur la co-indicatrice des produits canoniques, Ann. Inst. Fourier, Crenoble, 17, 1, 1967, 109—118.
3. И. Ф. Красичков, Оценки снизу для целых функций конечного порядка, Сиб. матем. ж., т. 3, № 4, 1965.
4. А. А. Гольдберг, Экстремальный индикатор для целой функции с положительными нулями, Сиб. матем. ж., т. 3, № 6, 1962.
5. P. Koosis, Sur la non-totalité de certaines suites d'exponentielles sur des intervales assez longs, Annal. scientifiques de l'école normale supérieure, 2, 1958, 125—152.


Поступила 19.XII 1969 г.

Львовский государственный университет