УДК 517.948

# Обратная задача нестационарного рассеяния для уравнений Дирака

Л. П. Нижник

Обратная задача рассеяния для уравнений Дирака на полуоси с потенциалом не зависящим от времени хорошо изучена [1, 2]. В случае, когда потенциал зависит от времени, обратная задача частично рассмотрена в [3]. Данная работа дополняет и уточняет результаты заметки [3].

Рассмотрим на всей оси $-\infty < x < +\infty$ систему уравнений Дирака вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} + c_1(x,t)\,u_2(x,t), \\ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} &= -\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} + c_2(x,t)\,u_1(x,t), \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$|c_k(x,t)| \leqslant \frac{C}{(1+|x|^{1+\varepsilon})(1+|t|^{1+\varepsilon})};\ k=1,2;\ \varepsilon>0, \tag{2}$$

а $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ для простоты считаем скалярными функциями. Отметим, что линейной заменой неизвестных функций система (1) легко приводится к виду, рассмотренному в [1, 2].

Лемма 1. *Всякое равномерно по $x$ и $t$ ограниченное решение системы (1) имеет асимптотику:*

$$u_1(x,t) \to a_1(x+t),\ u_2(x,t) \to a_2(t-x) \ \text{при}\ t \to -\infty, \tag{3}$$

$$u_1(x,t) \to b_1(x+t),\ u_2(x,t) \to b_2(t-x) \ \text{при}\ t \to +\infty, \tag{4}$$

*где $a_1, a_2, b_1, b_2$ — нокоторые равномерно ограниченные функции. Наоборот, для любых $a_1$ и $a_2$ ($b_1$ и $b_2$) существует решение $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ системы* (1), *для которого выполняется асимптотика* (3), (4).

Доказательство леммы следует из эквивалентности дифференциальных уравнений (1) одной из вольтерровых по $t$ систем интегральных уравнений, рассматриваемых в пространстве равномерно ограниченных функций:

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= u_1(x+t,0) + \int_0^t c_1(x+t-\tau,\tau)\,u_2(x+t-\tau,\tau)\,d\tau, \\ u_2(x,t) &= u_2(x-t,0) + \int_0^t c_2(x-t+\tau,\tau)\,u_1(x-t+\tau,\tau)\,d\tau; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= a_1(x+t) + \int_{-\infty}^t c_1(x+t-\tau,\tau)\,u_2(x+t-\tau,\tau)\,d\tau, \\ u_2(x,t) &= a_2(t-x) + \int_{-\infty}^t c_2(x-t+\tau,\tau)\,u_1(x-t+\tau,\tau)\,d\tau; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= b_1(x+t) - \int_t^{\infty} c_1(x+t-\tau,\tau)\,u_2(x+t-\tau,\tau)\,d\tau, \\ u_2(x,t) &= b_2(t-x) - \int_t^{\infty} c_2(x-t+\tau,\tau)\,u_1(x-t+\tau,\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{7}$$

Оператор рассеяния нестационарной задачи для системы Дирака (1) определяется [3, 4] как оператор $S$, переводящий вектор-функцию $a(x) = (a_1(x),\ a_2(x))$ в вектор-функцию $b(x) = (b_1(x),\ b_2(x))$.

При изучении свойств оператора рассеяния большую роль играют так называемые операторы преобразования. Введем аналоги таких операторов для системы (1), как разрешающие операторы для уравнений (6), (7).

Лемма 2. *Существует и единственно в пространстве равномерно ограниченных функций решение уравнений* (6), (7) *при любых свободных членах* $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \in C(E)$. *Для системы* (6) *решение представимо в виде*

$$
\begin{aligned}
u_1(x,t) &= a_1(x+t) + \int_{-\infty}^{t} H_{11}^{(+)}(x,t,\xi)\, a_1(x+\xi)\, d\xi + \\
&\quad + \int_{-\infty}^{t} H_{12}^{(+)}(x,t,\xi)\, a_2(\xi - x)\, d\xi, \\
u_2(x,t) &= a_2(t-x) + \int_{-\infty}^{t} H_{21}^{(+)}(x,t,\xi)\, a_1(x+\xi)\, d\xi + \\
&\quad + \int_{-\infty}^{t} H_{22}^{(+)}(x,t,\xi)\, a_2(\xi - x)\, d\xi,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

*а для системы* (7) *в виде*

$$
\begin{aligned}
u_1(x,t) &= b_1(x+t) + \int_{t}^{\infty} H_{11}^{(-)}(x,t,\xi)\, b_1(x+\xi)\, d\xi + \\
&\quad + \int_{t}^{\infty} H_{12}^{(-)}(x,t,\xi)\, b_2(\xi - x)\, d\xi, \\
u_2(x,t) &= b_2(t-x) + \int_{t}^{\infty} H_{21}^{(-)}(x,t,\xi)\, b_1(x+\xi)\, d\xi + \\
&\quad + \int_{t}^{\infty} H_{22}^{(-)}(x,t,\xi)\, b_2(\xi - x)\, d\xi,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

*где функции* $H_{kl}^{(+)}(x,t,\xi)$ *и* $H_{kl}^{(-)}(x,t,\xi)$ *при фиксированном* $x$ *суммируемы с квадратом по переменным* $t$ *и* $\xi$ *в областях* $\xi \leqslant t$ *и* $\xi \geqslant t$ *соответственно. При этом*

$$
H_{12}^{(+)}(x,t,t) = \frac{1}{2}\, c_1(x,t), \quad H_{21}^{(+)}(x,t,t) = \frac{1}{2}\, c_2(x,t), \tag{10}
$$

$$
H_{12}^{(-)}(x,t,t) = -\frac{1}{2}\, c_1(x,t), \quad H_{21}^{(-)}(x,t,t) = \frac{1}{2}\, c_2(x,t). \tag{11}
$$

Доказательство существования и единственности решений систем (6) и (7) легко следует из их вольтерровости по $t$. Представление решений в виде (8) и (9), а также существование $H_{kl}^{(+)}(x,t,\xi)$ и $H_{kl}^{(-)}(x,t,\xi)$ следует из того факта, что $H_{kl}^{(+)}$ и $H_{kl}^{(-)}$ удовлетворяют некоторым интегральным уравнениям, для которых сходится метод последовательных приближений. Эти уравнения для $H_{kl}^{(+)}$ и $H_{kl}^{(-)}$ получаются при подстановке (8), (9) в (6), (7) и использования произвольности функций $a_1, a_2, b_1, b_2$.

Запишем в операторной форме представление (8), (9) решений систем (6), (7). Для этого рассмотрим матричные вольтерровские операторы Гильберта — Шмидта с переменным верхним и соответственно нижним пределами:

$$H_+(x) = \| H_{kl}^{(+)}(x) \|_{k,l=1,2}, \quad H_-(x) = \| H_{kl}^{(-)}(x) \|_{k,l=1,2},$$

где

$$H_{kl}^{(+)}(x) f(t) = \int_{-\infty}^{t} H_{kl}^{(+)}(x, t, \xi) f(\xi)\, d\xi, \quad H_{kl}^{(-)}(x) f(t) = \int_{t}^{\infty} H_{kl}^{(-)}(x, t, \xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Введем матричный оператор сдвига:

$$\mathfrak{T}_x = \begin{pmatrix} T_x, & 0 \\ 0, & T_{-x} \end{pmatrix},$$

где $T_x$ — обычный оператор сдвига: $T_x f(t) = f(t + x)$. Представления (8) и (9) примут вид

$$u(x, t) = (I + H_+(x)]\, \mathfrak{T}_x a(t), \quad u(x, t) = [I + H_-(x)]\, \mathfrak{T}_x b(t), \tag{12}$$

где $I$ — единичный оператор, а $u(x, t)$ — вектор-функция составления из решений $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Учитывая определение оператора рассеяния: $b = S a$ из (12) легко получаем, что

$$\mathfrak{T}_x S \mathfrak{T}_{-x} = [I + H_-(x)]^{-1} [I + H_+(x)], \tag{13}$$

т. е. что оператор $\mathfrak{T}_x S \mathfrak{T}_{-x}$ при любом $x$ допускает по терминологии М. Крейна [5] правую факторизацию. Оказывается, что этот же оператор допускает и левую факторизацию. Действительно, рассматривая две системы уравнений, получающихся объединением первого уравнения из (6) со вторым уравнением из (7), а второго уравнения из (6) с первым из (7), можно получить утверждение, аналогичное лемме 1 для этих систем, из которого следует левая факторизация:

$$\mathfrak{T}_x S \mathfrak{T}_{-x} = [I + K_+(x)]^{-1} [I + K_-(x)].$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *При любом $x$ оператор $\mathfrak{T}_x S \mathfrak{T}_{-x}$ допускает двойную факторизацию (как левую, так и правую).*

Перейдем теперь к рассмотрению обратной задачи рассеяния для системы уравнений (1). Эта задача заключается в восстановлении уравнений (1) (т. е. функций $c_1(x, t)$ и $c_2(x, t)$) по оператору рассеяния $S$.

Известно [5], что если $B$ — интегральный оператор Гильберта—Шмидта в пространстве $L_2[(-\infty, +\infty), E^m]$ вектор-функций со значением в $m$-мерном евклидовом пространстве, то при любом $\lambda$ существует и единственно в $L_2$ решение уравнения $y(x) + \int_{-\infty}^{\lambda} B(x, s)\, y(s)\, ds = f(x)$ для любой правой части тогда и только тогда, когда оператор $I + B$ допускает левую факторизацию. Однозначная разрешимость уравнения $y(x) + \int\limits_{\lambda}^{\infty} B(x, s) y(s)\, ds = f(x)$ при любом $\lambda$ эквивалентна условию, что оператор $I + B$ допускает правую факторизацию. Используя эти результаты, можно показать, что если оператор $A = I + B$ имеет обратный $A^{-1} = I + C$, где $B$ и $C$ — интегральные операторы Гильберта — Шмидта, то оператор $A$ допускает двойную факторизацию тогда и только тогда, когда при любом $\lambda$ система интегральных уравнений

$$X(t) = \alpha(t) + \int\limits_{\lambda}^{\infty} Y(\xi) B(\xi, t)\, d\xi,$$

$$Y(t) = \beta(t) + \int\limits_{-\infty}^{\lambda} X(\xi) C(\xi, t)\, d\xi$$

однозначно разрешима.

Используя приведенные результаты об операторах допускающих факторизацию и теорему 1, можно сформулировать следующий результат по обратной задаче нестационарного рассеяния для уравнений Дирака вида (1).

Т е о р е м а 2. *Каждому оператору рассеяния $S$ соответствует единственное уравнение* (1). *При этом система матричных уравнений*

$$H_{+}(x, t, \xi) = F(x, t, \xi) + \int\limits_{t}^{\infty} H_{-}(x, t, \eta) F(x, \eta, \xi)\, d\eta,$$

$$H_{-}(x, t, \xi) = G(-x, t, \xi) + \int\limits_{-\infty}^{t} H_{+}(x, t, \eta) G(-x, \eta, \xi)\, d\eta,$$

*где $F(x, t, \xi)$ и $G(-x, t, \xi)$ — ядра интегральных операторов $\mathfrak{T}_x S \mathfrak{T}_{-x} - I$ и $\mathfrak{T}_{-x} S^{-1} \mathfrak{T}_x - I$, однозначно разрешима и*

$$H_{12}^{(+)}(x, t, t) = -H_{12}^{(-)}(x, t, t) = \frac{1}{2} c_1(x, t),$$

$$H_{21}^{(+)}(x, t, t) = -H_{21}^{(-)}(x, t, t) = \frac{1}{2} c_2(x, t).$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. М. Г. К р е й н, К теории акселерант и $S$-матриц канонических дифференциальных систем, ДАН СССР, т. 111, 1956.
2. М. Г. Г а с ы м о в, Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка $2n$, Труды Моск. матем. об-ва, т. 19, 1968.
3. Л. П. Н и ж н и к, Обратная задача нестационарного рассеяния для гиперболической системы уравнений, сб. Линейные и нелинейные краевые задачи, Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1971.
4. Т. Ю. В у, Т. О м у р а, Квантовая теория рассеяния, «Наука», М., 1969.
5. И. Ц. Г о х б е р г, М. Г. К р е й н, Теория вольтерровских операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, «Наука», М., 1967.



Поступила 29.IX 1971 г.


Институт математики АН УССР