УДК 517.9:538.3

Об одном методе исследования решений системы Максвелла

Н. Т. Стельмашук

Имеется ряд работ [1, 2], в которых изучаются так называемые функционально-инвариантные (ф.-и.) решения некоторых уравнений математической физики. В работах [3, 4] автора изучались ф.-и. решения Максвелла для электромагнитного поля в пустоте методом гиперкомплексных F-моногенных функций, т. е. моногенных в смысле В. С. Федорова [5, 6]. Данная работа примыкает к работам автора [3, 4]. Известную систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля в пустоте запишем в следующей комплексной форме:

$$\operatorname{rot}(\overline{E}+i\overline{H})=\gamma\frac{\partial}{\partial t}(\overline{E}+iH);\ \operatorname{div}(\overline{E}+i\overline{H})=0\ \left(\gamma=\frac{i}{c}\right) \tag{A}$$

и для всякого решения этой системы: $\overline{E}+i\overline{H}=\{u, v, w\}$, где u, v, w—комплексные скалярные функции от x, y, z и t, назовем решением и гиперкомплексную функцию $\sigma=u+\varepsilon_1 v+\varepsilon_2 w$, где $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ — база некоторой линейной алгебры, предполагаемой всегда ассоциативно-коммутативной и с единицей над полем обыкновенных комплексных чисел.

Назовем эту функцию σ функционально-инвариантным (ф.-и.) решением системы (А), если всякая функция f F-моногенна по σ, также удовлетворяет системе (А).

Совершенно таким же методом, как и в работе автора [4] (в которой рассматривался частный случай указанной алгебры), доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Функция $\sigma=u+\varepsilon_1 v+\varepsilon_2 w$ будет функционально-инвариантным решением системы Максвелла при следующем необходимом и достаточном условии*:

$$\operatorname{rot}\overline{T}_1=\gamma\frac{\partial\overline{T}_1}{\partial x_4},\ \operatorname{rot}\overline{T}_2=\gamma\frac{\partial\overline{T}_2}{\partial x_4},\ \operatorname{rot}\overline{T}_3=\gamma\frac{\partial\overline{T}_3}{\partial x_4},$$

$$\operatorname{div}\overline{T}_1=0,\ \operatorname{div}\overline{T}_2=0,\ \operatorname{div}\overline{T}_3=0,$$

где здесь и ниже $x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z,\ x_4=t$;

$$\overline{T}_1=\{u, v, w\},\ \overline{T}_2=\{B_0, B_1, B_2'\},\ \overline{T}_3=\{A_0, A_1', A_2\}.$$

$$A_0=a_0v+c_0w;\ A_1=a_1v+c_1w;\ B_0=b_0w+c_0v,\ B_1=b_1w+c_1v;$$

$$A_2=a_2v+c_2w,\ B_2=b_2w+c_2v,\ A_1'=u+A_1,\ B_2'=u+B_2,$$

если таблица умножения для данной алгебры определяется условием

$$\varepsilon_1^2=a_0+a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2,\ \varepsilon_2^2=b_0+b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2,\ \varepsilon_1\varepsilon_2=\varepsilon_2\varepsilon_1=c_0+c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2$$

(a_k, b_k, c_k — комплексные, вообще говоря, постоянные, $k=0, 1, 2$).

Рассмотрим здесь и ниже такую алгебру, в которой $\varepsilon_1=\eta$, $\varepsilon_2=\eta^2$, причем $\eta^3=\beta$, где β — данное действительное число и обозначим эту алгебру $A(\beta)$. Как легко видеть, в этой алгебре имеем такое следствие.

Следствие. *Для того, чтобы функция σ в алгебре $A(\beta)$ была ф.-и. решением системы* (А), *необходимо и достаточно выполнение следующих равенств*:

$$w_y-v_z=\gamma u_t;\ u_z-w_x=\gamma v_t,\ v_x-u_y=\gamma w_t,$$

$$u_y - \beta w_z = \beta\gamma v_t,\ \beta v_z - u_x = \beta\gamma w_t,\ \beta(w_x - v_y) = \gamma u_t,$$
$$v_y - u_z = \beta\gamma w_t,\ \beta w_z - v_x = \gamma u_t,\ u_x - \beta w_y = \gamma v_t, \tag{1}$$
$$u_x = -v_y - w_z,\ u_y = -\beta w_x - v_z,\ u_z = -\beta v_x - \beta w_y.$$

Замечание. Во всем дальнейшем полагаем

$$\alpha_1 = -\beta v_x = \beta w_y,\ \alpha_2 = -v_z - \beta w_x,\ \alpha_3 = -v_y - w_z,$$
$$\alpha_4 = \gamma^{-1}(w_y - v_z),\ \alpha_5 = w_x + \gamma v_t,\ \alpha_6 = v_x - \gamma w_t,$$
$$\alpha_7 = \gamma^{-1}\beta(w_x - v_y),\ \alpha_8 = \beta(v_z - \gamma w_t),\ \alpha_9 = \beta(w_z + \gamma v_t), \tag{2}$$
$$\alpha_{10} = \gamma^{-1}(\beta w_z - v_x),\ \alpha_{11} = \beta w_y + \gamma v_t,\ \alpha_{12} = v_y - \beta\gamma w_t.$$

Теорема 2. *Для того чтобы функция $\sigma = u + \eta v + \eta^2 w$ в алгебре $A(\beta)$ было ф.-и. решением системы* (A), *необходимо и достаточно, чтобы функции v и w удовлетворяли системе*

$$\alpha_1 = \alpha_5 = \alpha_{12},\ \alpha_2 = \alpha_9 = \alpha_6,$$
$$\alpha_3 = \alpha_8 = \alpha_{11},\ \alpha_4 = \alpha_7 = \alpha_{10} \tag{3}$$

и чтобы нашлись такие функции $F(x, y, z, t)$ и $\Phi(t)$, для которых

$$\alpha_1 = \frac{\partial F}{\partial z},\ \alpha_2 = \frac{\partial F}{\partial y},$$
$$\alpha_3 = \frac{\partial F}{\partial x},\ \ \alpha_4 = \frac{\partial F}{\partial t} + \Phi(t). \tag{4}$$

При этом функция u определяется из условия

$$du = \alpha_3 dx + \alpha_2 dy + \alpha_1 dz + \alpha_4 dt. \tag{5}$$

Необходимость. Пусть функция σ есть ф.-и. решение системы Максвелла (A). Тогда по следствию теоремы 1 имеем

$$u_x = \alpha_3,\ u_y = \alpha_2,\ u_z = \alpha_1,\ u_t = \alpha_4,$$
$$u_z = \alpha_5,\ u_y = \alpha_6,\ u_t = \alpha_7,\ u_x = \alpha_8, \tag{6}$$
$$u_y = \alpha_9,\ u_t = \alpha_{10},\ u_x = \alpha_{11},\ u_z = \alpha_{12}.$$

Из системы (6) непосредственно получаем систему (3), а также имеем

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial x} = \frac{\partial\alpha_3}{\partial z},\ \ \frac{\partial\alpha_2}{\partial x} = \frac{\partial\alpha_3}{\partial y},\ \ \frac{\partial\alpha_2}{\partial z} = \frac{\partial\alpha_1}{\partial y},$$
$$\frac{\partial\alpha_4}{\partial y} = \frac{\partial\alpha_2}{\partial t},\ \ \frac{\partial\alpha_4}{\partial z} = \frac{\partial\alpha_1}{\partial t},\ \ \frac{\partial\alpha_4}{\partial x} = \frac{\partial\alpha_3}{\partial t}. \tag{7}$$

Поэтому существует такая функция $F(x, y, z, t)$, что

$$\alpha_3 = \frac{\partial F}{\partial x},\ \alpha_2 = \frac{\partial F}{\partial y},\ \alpha_1 = \frac{\partial F}{\partial z},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_4 - \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_4 - \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0,\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha_4 - \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0. \tag{8}$$

Отсюда

$$\alpha_4 - \frac{\partial F}{\partial t} = \Phi(t), \tag{9}$$

где правая часть есть некоторая функция одного переменного t. Из (8) и (9) получим (4). Необходимость доказана.

Достаточность. Если функции v и w удовлетворяют системе вида (4), тогда выражение

$$\alpha_3 dx + \alpha_2 dy + \alpha_1 dz + \alpha_4 dt$$

есть полный дифференциал и можно найти функцию u из (6). Если, кроме того, дается система (3), то отсюда следует система (6), т. е. система (1), а из системы (1) следует, что функция $\sigma = u + \eta v + \eta^2 w$ есть ф.-и. решение системы (A). Теорема доказана.

Теорема 3. *Функция $\sigma = u + \eta v + \eta^2 w$, отличная от константы, где $\eta^3 = \beta$, не будет ф.-и. решением системы* (A), *если β отлично от* 1 *или* -1.

Доказательство. Если σ есть ф.-и. решение системы (A), то из (3) и (2) имеем:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial w}{\partial x_2} = -\beta \frac{\partial v}{\partial x_1} - \gamma \frac{\partial v}{\partial x_4}, \quad \beta \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{\partial w}{\partial x_2} = \beta \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_3},$$

$$\beta\gamma \frac{\partial w}{\partial x_4} = \frac{\partial v}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial v}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \beta\gamma \frac{\partial w}{\partial x_4} = \beta\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_3}\right),$$

$$\beta \frac{\partial w}{\partial x_3} = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial w}{\partial x_1} - \beta \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \beta \frac{\partial w}{\partial x_3} = -\beta\left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial w}{\partial x_2} + \gamma \frac{\partial v}{\partial x_4}\right),$$

$$\beta \frac{\partial w}{\partial x_3} = -\frac{\partial v}{\partial x_3} - \beta \frac{\partial w}{\partial x_1} - \beta\gamma \frac{\partial v}{\partial x_4}, \quad -\frac{\partial w}{\partial x_3} + \beta\gamma \frac{\partial w}{\partial x_4} = \frac{\partial v}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial v}{\partial x_3},$$

откуда

$$(\beta^2 - 1)\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0, \quad (\beta^2 - 1)\frac{\partial v}{\partial x_2} = 0,$$

$$(\beta^2 - 1)\frac{\partial v}{\partial x_1} + \beta^3(\beta^2 - 1)\frac{\partial v}{\partial x_2} + \beta^2(1 - \beta^2)\frac{\partial v}{\partial x_3} + \gamma(1 - \beta^2)\frac{\partial v}{\partial x_4} = 0,$$

$$(1 - \beta^2)\frac{\partial v}{\partial x_1} + \beta(\beta^2 - 1)\frac{\partial v}{\partial x_2} + (1 - \beta^2)\frac{\partial v}{\partial x_3} + \gamma\beta(\beta^2 - 1)\frac{\partial v}{\partial x_4} = 0.$$

Случай $\beta \neq \pm 1$ приводит к тому, что $v = \text{const}$ и $w = \text{const}$, а тогда $u = \text{const}$ (в силу (5)). Теорема доказана.

Примеры ф.-и. решений системы (A) (случай $\eta^3 = -1$*).

1. σ — линейная функция, причем

$$u = \frac{1}{2}\Big[(a_1 - a_2 - a_3 + \gamma a_4)x_1 + (a_1 + a_2 - a_3 - \gamma a_4)x_2 +$$

$$+ (a_1 + a_2 + a_3 + \gamma a_4)x_3 + \frac{1}{\gamma}(a_2 - a_1 - a_3 + \gamma a_4)x_4\Big],$$

---

* Случай $\eta^3 = 1$ рассмотрен автором в работе [4].

$$v = \sum_{k=1}^{4} a_k x_k, \quad w = \frac{1}{2}\Big[(a_1 + a_2 + a_3 - \gamma a_4)\, x_1 + (a_2 - a_1 + a_3 + \gamma a_4)\, x_2 + $$
$$+ (a_3 - a_1 - a_2 - \gamma a_4)\, x_3 + \frac{1}{\gamma}\,(a_3 + a_1 - a_2 + \gamma a_4)\, x_4\Big]$$

(a_k — произвольные комплексные константы, $k = 1, 2, 3, 4$).

2. Любые аналитические функции от указанной линейной функции σ.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Л. Соболев, Функционально-инвариантные решения волнового уравнения, Труды Физико-математического ин-та АН СССР, т. 5, 1934.
2. Н. П. Еругин, Функционально-инвариантные решения уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, Ученые записки ЛГУ, сер. матем. наук, вып. 16, 1949.
3. Н. Т. Стельмашук, О функционально-инвариантных решениях системы Максвелла, Bull. math. Soc. sci. math. et phys. RPR, **6**, № 1—2, 1962, 96—106.
4. Н. Т. Стельмашук, Об одном исследовании системы Максвелла с помощью F-моногенных функций, Ж. выч. матем. и матем. физ., т. 7, № 2, 1967.
5. В. С. Федоров, Основные свойства обобщенных моногенных функций, Изв. вузов, Математика, т. 6 (7), 1958.
6. Gr. C. Moisil, Asupra unei generalizăria ideii de monogeneitate datoritá lui V. S. Feodorov, Bul. Stiint. Acad. RPR, Siria A, I, № 10, 1949, pp. 959—964.

Поступила 18.III 1968 г.
после переработки — 16.X 1971 г.
Минск