УДК 519.2+517.946

Про марковські процеси в гільбертовому просторі

В. Г. Бондаренко

В статті досліджуються деякі властивості однорідних марковських процесів, значення яких належать сепарабельному гільбертовому простору E. Теорія процесів в півкомпакті з вичерпною повнотою викладена в [1], але в нескінченновимірному випадку з'являються деякі ускладнення. В роботі розглянуто півгрупи операторів, які відповідають процесові, а також вивчаються деякі властивості дифузійних процесів. Використовуються поняття та позначення з [1].

1°. Нехай X — нормальний однорідний марковський процес в E. Як звичайно, з процесом зв'язана півгрупа стискуючих операторів, яка визначається за формулою:

$$T_t f(x) = \int_E P(t, x, dy) f(y), \tag{1}$$

де $P(t, x, \Gamma) = P_x\{x_t \in \Gamma\}$ — перехідна функція процесу $X (t \geqslant 0.\ \ x \in E,$ $\Gamma \in \mathfrak{B}, \mathfrak{B}$ — борелівська σ-алгебра), $f(x)$ — $\mathfrak{B}$-вимірна функція, для якої має зміст інтеграл у правій частині. Ця півгрупа додатна в тому розумінні, що вона залишає інваріантним конус невід'ємних функцій. Нас цікавитимуть перехідні C°-функції, тобто такі, що $T_t C^\circ \subseteq C$, де C° — банахів простір рівномірно неперервних обмежених функцій з нормою $\|f\| = \sup\limits_{x\in E} |f(x)|$. Якщо перехідна функція процесу рівномірно стохастично неперервна, тобто $\lim\limits_{t\downarrow 0} \sup\limits_{x\in E} [1 - P(t, x, U_\varepsilon(x)] = 0$, то півгрупа T_t сильно неперервна в C°.

Навпаки, нехай в просторі C° є стискуюча додатна півгрупа T_t. Тоді із загальних міркувань випливає лише подання

$$T_t f(x) = \int_E G(t, x, dy) f(y),\ \ f \in C^\circ, \tag{2}$$

де G — скінченноадитивна функція на борелівській алгебрі в E і невідомо, чи відповідає півгрупа деякому марковському процесові.

Введемо в E $\mathfrak{J}$-топологію [2], в якій базис околиць нуля утворюють множини $\underset{\mathfrak{J}}{U}(T, \varepsilon) = \{x : (Tx, x) < \varepsilon\}$, ($T$ — додатний ядерний оператор в E). Запис $x_n \to 0$ означає, що $x_n \to 0$ в $\mathfrak{J}$-топології. Позначимо $f_{z_n}(x) = 1 -$ $- \cos(z_n, x)$.

Теорема 1. *Для того, щоб стискуюча додатна підгрупа T_t в C° відповідала деякому марковському процесу, необхідно і досить, щоб $T_t f_{z_n}(x) \to 0$ як тільки $z_n \xrightarrow{\mathfrak{J}} 0 \, (x \in E,\ t \geqslant 0)$.*

Головним є доведення того факту, що T_t породжує σ-адитивну міру. Для цього треба розглянути функцію $\varphi(z_n) = T_t f_{z_n}(x)$; за теоремою Мінлоса — Сазонова [2] $\varphi(z) = \mathrm{Re}[1 - \chi(z)]$, де $\chi(z)$ — характеристичний функціонал σ-адитивної міри $P(t, x, \Gamma)$. За теоремою 3.2 [1] перехідна функція визначає марковський процес X.

Вкажемо тепер деякі додатні умови в термінах інфінітизимального оператора A півгрупи T_t.

Теорема 2. *Нехай* $f_{z_n} \in D_{A^2}$, $\lim\limits_{\substack{\mathfrak{J} \\ z_n \to 0}} A^k f_{z_n}(x) = 0$, $\| A^k f_{z_n} \| \leqslant M$, $k = 1, 2$ $(x \in E,\ t \geqslant 0)$. *Тоді має місце формула* (1), *де* P — *перехідна* C°-*функція; отже,* A *є інфінітизимальний оператор марковського процесу.*

Для доведення слід подати півгрупу у вигляді

$$T_t f_{z_n}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \left[\frac{1}{\lambda} f_{z_n}(x) + \frac{1}{\lambda^2} A f_{z_n}(x) + \frac{1}{\lambda^2} R_\lambda A^2 f_{z_n}(x) \right] e^{\lambda t} d\lambda, \ \alpha > 0,$$

а потім застосувати теорему 1.

Зазначимо, що коли відомий порядок спадання норми резольвенти на прямій $\mathrm{Re}\,\lambda = \alpha$, то умови теореми можна послабити. Наприклад, якщо $|\lambda| \cdot \| R_\lambda \|$ обмежено на цій прямій, то досить, щоб $f_{z_n} \in D_A$.

2°. На нескінченновимірний випадок легко узагальнюється поняття дифузійного процесу. Ми розглянемо цей клас процесів і одержимо вираз для характеристичного оператора $\mathfrak{A}$. Зазначимо, що визначення та головні властивості характеристичного оператора, розглянуті в [1], залишаються незмінними.

Означення. Неперервний марковський процес в E назвемо дифузійним, якщо виконуються такі умови:

1) $D_{\mathfrak{A}}(x) \supseteq C^2(x)$, $x \in E$.

2) Лінійний функціонал $l_x(\varphi) = (\mathfrak{A}\Delta_y^\varphi)(x) = (a(x), \varphi)$, де $\Delta_x^\varphi(y) = (y - x, \varphi)$, неперервний для кожного $x \in E$.

3) Білінійний функціонал $\Omega_x(\varphi, \psi) = (\mathfrak{A}\Delta_x^{\varphi, \psi})(x) = (B(x)\varphi, \psi)$, де $\Delta_x^{\varphi, \psi}(y) = (y - x, \varphi)(y - x, \psi)$, неперервний для кожного $x \in E$.

Теорема 3. *Для того, щоб* $D_{\mathfrak{A}}(x) \supseteq C^2(x)$, *необхідно і досить, щоб функції* 1, $(y - x, \varphi)$, $(y - x, \varphi)(y - x, \psi)$ *і* $\| x \|^2$ *належали області визначення* $D_{\mathfrak{A}}(x)$ *характеристичного оператора. Якщо* X *є дифузійним процесом і* $f \in C^2$, *то*

$$\mathfrak{A}f(x) = \frac{1}{2} Sp\,(B(x) B^*(x) f''(x)) + (a(x), f'(x)) - c(x) f(x), \tag{3}$$

де $B(x)$ — оператор Гільберта — Шмідта, $a(x) \in E$, $c(x) \geqslant 0$.

Для доведення слід вивести формулу (3) для $f(x) = (Hx, x)$, де H — обмежений оператор; потім, застосувавши формулу Тейлора, можна одержати (3) для довільної $f \in C^2$.

Як і в скінченновимірному випадку, дифузійність процессу можна визначити через його перехідну функцію. Для цього повинні виконуватись умови:

1. Для кожної точки $x \in E$ існує $U(x)$ така, що $M_x \tau_U < \infty$.
2. Для кожної точки $x \in E$ існують границі:

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} [1 - P(t, x, E)] = c(x),$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int\limits_E P(t, x, dy)(y - x, \varphi) = (a(x), \varphi),$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_E P(t, x, dy)(y - x, \varphi)(y - x, \psi) = (K(x)\varphi, \psi),$$

де $K(x)$ — ядерний оператор, причому ліві частини рівномірно обмежені по $x \in E$, $t \geqslant 0$, а функції в правій частині неперервні в точці x.

Зазначимо, що вимогу ядерності для оператора $K(x)$ можна замінити умовою існування границі:

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_E \| y - x \|^2 P(t, x, dy) = g(x),$$

де $g(x)$ — неперервна обмежена функція.

ЛІТЕРАТУРА

1. Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, Физматгиз, М., 1963.
2. В. В. Сазонов, Замечание о характеристических функциях, Теория вероятностей и ее применения, т. 3, 1958, 201—205.

Надійшла 16.XI 1970 р.
Київський політехнічний інститут

УДК 517.5

Про одну властивість функцій L-базису

І. Ф. Григорчук

1. Нехай L — оператор, заданий формулою

$$L = D^n + p_{n-1}(x) D^{n-1} + p_{n-2}(x) D^{n-2} + \ldots + p_0(x), \tag{1}$$

де $D = \frac{d}{dx}$, $p_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ — неперервні функції, задані на скінченному інтервалі (a, b) дійсної числової осі.

За М. К. Фаге, система функцій (див. [1])

$$f_0(x, x_0), f_1(x, x_0), \ldots, f_m(x, x_0), \ldots \tag{2}$$

називається L-базисом в точці x_0, якщо перші n функцій є розв'язками рівняння $Lf_m(x, x_0) = 0$ при початкових умовах в точці x_0

$$\left. \frac{d^s f_m(x, x_0)}{dx^s} \right|_{x = x_0} = \begin{cases} 0, & s \neq m, \\ 1, & s = m, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

а наступні визначаються за рекурентними формулами

$$Lf_m(x, x_0) = f_{m-n}(x, x_0), \quad m = n, n+1, \ldots$$

при початкових умовах в точці x_0

$$\left. \frac{d^s f_m(x, x_0)}{dx^s} \right|_{x = x_0} = 0.$$

У випадку $L = D$, система функцій (2) має вигляд:

$$1, \frac{x - x_0}{1!}, \frac{(x - x_0)^2}{2!}, \ldots, \frac{(x - x_0)^m}{m!}, \ldots . \tag{3}$$