УДК 519.3:51:62—50

# До розв'язання задачі ухилення від зустрічі

*І. В. Бейко, З. М. Шпортюк*

Розглядається задача про максимін часу до зустрічі двох керованих об'єктів, рух яких описується рівняннями:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = C(t)y + D(t)v, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

де $x, y$ — $n$-вимірні вектор-функції переслідуючого і переслідуваного об'єктів відповідно; $A(t)$, $C(t)$ — $(n \times n)$, $B(t)$, $D(t)$ — $(n \times r)$-матриці, неперервні щодо $t$; $u, v$ — $r$-вимірні вектори керувань, які в кожний момент часу $t$ задовольняють обмеження:

$$u(t) \in U, \quad v(t) \in V, \tag{3}$$

де $U, V$ — замкнені, випуклі, обмежені множини.

Позначимо через $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ — керування об'єктів (1), (2), взяті як елементи функціонального простору, а $u(t)$, $v(t)$ — керування в момент часу $t$; $x(\cdot, u)$, $y(\cdot, v)$ — траєкторії об'єктів (1) і (2), які відповідають керуванням $u(\cdot)$ і $v(\cdot)$, а $x(t, u)$, $y(t, v)$ — точки цих траєкторій в момент часу $t$.

Якщо для вибраних керувань $u(\cdot)$ і $v(\cdot)$ в деякий момент часу $t = T(u, v) > 0$ вперше виконується рівність $x(t, u) = y(t, v)$, то цей факт називають зустріччю об'єктів (1) і (2), а час $T(u, v)$ — часом зустрічі. Позначимо $T(v) = \min\limits_{u(\cdot)} T(u, v)$ — час найшвидшого для системи (1) попадання в точку, яка рухається по траєкторії $y(\cdot, v)$ системи (2). Нехай для всіх $v (\in V)$ $0 < T(v) \leqslant K < \infty$. Задача полягає у відшуканні керування $v^\circ$ (1) переслідуваної системи, яке задовольняє співвідношення

$$T(v^\circ) = \max_{v(\cdot)} T(v). \tag{4}$$

Нехай $v^n(\cdot)$ — деяке керування переслідуваної системи. Відповідну йому траєкторію $y(\cdot, v^n)$ будемо позначати для простоти $y^n(\cdot)$ і $T(v^n) = t_n$.

Як відомо [1], існує такий вектор $c^n$, $\|c^n\| = 1$, що

$$(\psi^n(t), B(t)u^n(t)) = \max_{u \in U} (\psi^n(t), B(t)u), \tag{5}$$

$$\frac{d\psi^n(t)}{dt} = -A^*(t)\psi^n(t), \quad \psi^n(t_n) = c^n, \tag{6}$$

де $u^n(\cdot)$ — оптимальне за швидкодією керування системи (1), $x^n(\cdot)$ — відповідна траєкторія, така що $x^n(t_n) = y^n(t_n)$.

Будемо вважати, що при відомому керуванні $v^n(\cdot)$ задача знаходження $t_n$, вектора $c^n$ і оптимальної траєкторії $x^n(\cdot)$ розв'язувана (див., наприклад, [2]) і принцип максимуму (5) однозначно визначає оптимальне керування.

Введемо функціонал

$$\varphi(v, v^n) = \max_{t\in[0,t_n]} (\psi^n(t), x^n(t) - y(t, v)). \tag{7}$$

Справедлива така лема,

Лема 1. *Якщо існує керування $v^*(\cdot)$, для якого $\varphi(v^*, v^n) < 0$, то гарантований час ухилення від зустрічі для системи* (2) *більший, ніж $t_n$.*

Доведення. Покажемо, що $T(v^*) > t_n$. Оскільки $(\psi^n(t), x) \leqslant \leqslant (\psi^n(t), x^n(t)) < (\psi^n(t), y(t, v^*))$ для всіх $x \in X(t)$, $X(t)$ — множина досяжності [3] системи (1) в момент часу $t$, і $t \in [0, t_n]$, то $y(t, v^*) \overline{\in} X(t)$ для всіх $t \in [0, t_n]$. Нехай керування $u(\cdot)$ здійснює зустріч з траєкторією $y(\cdot, v^*)$ в момент часу $t_u$. Очевидно, $t_u > t_n$. Оскільки $(\psi^n(t_u), x^n(t_u) - y(t_u, v^*)) \geqslant 0$, $(\psi^n(t), x^n(t) - y(t, v^*)) < 0$ для всіх $t \in [0, t_n]$, а функція $(\psi^n(t), x^n(t) - - y(t, v^*))$ неперервна щодо $t$, то існує таке $t_1$, $t_n < t_1 \leqslant t_u$, що $(\psi^n(t_1), x^n(t_1) - - y(t_1, v^*)) = 0$. Внаслідок того, що $t_1 \leqslant t_u$ для кожного керування $u(\cdot)$, яке здійснює зустріч з траєкторією $y(t, v^*)$, то $T(v^*) = \min t_u \geqslant t_1 > t_n$, що й треба було довести. Доведена лема дає можливість одержати для деякого класу систем (1) і (2) просте доведення необхідних умов оптимальності керування $v^0(\cdot)$, яке є розв'язком задачі (4), і побудувати наближений метод його відшукання.

Розглянемо випадок однотипних об'єктів (1) і (2), коли

$$C(t) \equiv A(t),\ D(t) \equiv B(t),\ V \subset \operatorname{int} U. \tag{8}$$

При умовах (8) справедлива наступна лема.

Лема 2. *Якщо $v^0(\cdot)$ — розв'язок задачі* (4), *то*

$$\min_{v\in V} \max_{t\in[0,T(v^0)]} (\psi^0(t), x^0(t) - y(t, v)) = \varphi(v^0, v^0) = 0. \tag{9}$$

Доведення. Покажемо, що $\varphi(v^0, v^0) = 0$. Для довільного $t < T(v^0)$ одержуємо

$$(\psi^0(t), x^0(t) - y(t, v^0)) = (\psi^0(T(v^0)), x^0(T(v^0)) - y(T(v^0), v^0)) -$$

$$- \int_t^{T(v^0)} (\psi^0(\tau), B(\tau)(u^0(\tau) - v^0(\tau)))\, d\tau < (\psi^0(T(v^0)), x^0(T(v^0)) - y(T(v^0), v^0)) = 0.$$

Тому $\varphi(v^0, v^0) = \max_{t\in[0,T(v^0)]} (\psi^0(t), x^0(t) - y(t, v^0)) = 0.$

Згідно з означенням максимінного часу, для довільного керування $v(\cdot) \neq v^0(\cdot)$ існує момент часу $t_v \leqslant T(v^0)$ такий, що $y(t_v, v) \in X(t_v)$. Тому $(\psi^0(t_v), x^0(t_v) - y(t_v, v)) \geqslant 0$ і поготів $\varphi(v, v^0) \geqslant 0 = \varphi(v^0, v^0)$. Остання нерівність доводить лему.

Керування $v^0(\cdot)$, яке задовольняє умову (9), будемо називати екстремальним.

Нехай побудоване керування $v^n(\cdot)$, знайдені переслідуюче керування $u^n(\cdot)$, час переслідування $t_n$ і вектор $c^n$, $\| c^n \| = 1$, який визначає розв'язок спряженої системи (6). Розглянемо функціонал $\varphi(v, v^n)$. Якщо на керуванні $v^n(\cdot)$ функціонал досягає мінімального значення, то керування $v^n(\cdot)$ — екстремальне. У протилежному випадку існує керування $v_1(\cdot)$, для якого $\varphi(v_1, v^n) < 0$.

Нехай система (2) і множина $V$ такі, що для функції $\psi^n(t)$, яка визначається згідно з формулами (6), співвідношення $(-\psi^n(t), B(t)\overline{v}^n(t)) =$

$= \min_{v \in V} (-\psi^n(t), B(t)v)$ однозначно визначає керування $\overline{v}^n(t)$ і точку $y(t_n, \overline{v}^n)$. Якщо $y(t_n, \overline{v}^n) \neq y(t_n, v^n)$, то покладемо $v^{n+1}(\cdot) = \overline{v}^n(\cdot)$. Покажемо, що $\varphi(v^{n+1}, v^n) < 0$. Дійсно, для $t < t_n$ маємо

$$(\psi^n(t), x^n(t) - y(t, v^{n+1})) = (\psi^n(t_n), x^n(t_n) - y(t_n, v^{n+1})) -$$

$$- \int_t^{t_n} (\psi^n(\tau), B(\tau) - (u^n(\tau) - v^{n+1}(\tau)))\, d\tau < (\psi^n(t_n), x^n(t_n) - y^n(t_n)) = 0.$$

Тому і $\max_{t \in [0, t_n]} (\psi^n(t), x^n(t) - y(t, v^{n+1})) < 0$.

Теорема. *Із побудованої послідовності керувань $v^n(\cdot)$ можна вибрати підпослідовність, яка збігається за мірою до екстремального керування $\overline{v}(\cdot)$* (на $[0, \overline{t}]$).

Доведення. Послідовність $t_n$ монотонно зростає і обмежена зверху. Тому існує границя $\lim_{n\to\infty} t_n = \overline{t} \leqslant T(v^0)$.

Внаслідок рівномірної обмеженості множин досяжності $X(\overline{t})$, $Y(\overline{t})$, можна вибрати збіжні підпослідовності

$$x^m(t_m) \to \overline{x}, \ \ y^{m+1}(t_m) \to \overline{y}.$$

Із неперервної залежності $X(t)$ і $Y(t)$ від $t$ випливає, що $\overline{x} \in X(\overline{t})$, $\overline{y} \in Y(\overline{t})$. Оскільки $\|c^n\| = 1$, то можна вважати, що вектори $c^m$ збігаються до деякого вектора $\overline{c}$, $\|\overline{c}\| = 1$.

Оскільки $\lim_{m\to\infty} t_m = \overline{t}$, то $\lim_{m\to\infty} (x^m(t_m) - x^m(\overline{t})) = 0$. Враховуючи, що $\lim_{m\to\infty} (t_m - t_{m-1}) = 0$, і збіжність послідовності $y^m(t_{m-1})$, одержуємо $\lim_{m\to\infty} (y^{m+1}(t_m) - y^m(t_m)) = \lim_{m\to\infty} (y^{m+1}(t_m) - y^m(t_{m-1}) + y^m(t_{m-1}) - y^m(t_m)) = 0$. Звідси, враховуючи, що $x^m(t_m) = y^m(t_m)$, маємо

$$\lim_{m\to\infty} y^{m+1}(t_m) = \lim_{m\to\infty} y^m(t_m) = \lim_{m\to\infty} x^m(t_m) = \lim_{m\to\infty} x^m(\overline{t}) = \overline{y}.$$

Із останньої рівності внаслідок замкненості множини $X(\overline{t})$ випливає, що $\overline{y} \in X(\overline{t})$ і $\overline{y} = \overline{x}$.

Доведемо, що $\min_{y \in Y(\overline{t})} (-\overline{c}, y) = (-\overline{c}, \overline{y})$.

Внаслідок неперервності щодо $t$ функцій $\psi^m(t)$ і збіжності послідовності $t_m$, одержуємо

$$\lim_{m\to\infty} \psi^m(\overline{t}) = \lim_{m\to\infty} \psi^m(t_m) = \lim_{m\to\infty} c^m = \overline{c}.$$

Аналогічно, як і для послідовності $\{x^m(t_m)\}$, можна показати, що

$$\lim_{m\to\infty} y^m(t_{m-1}) = \lim_{m\to\infty} y^m(\overline{t}) = \overline{y}.$$

Із неперервності [3] щодо $c$ функції $\min_{y \in Y(\overline{t})} (-c, y)$ випливає, що

$$\min_{y \in Y(\overline{t})} (-\overline{c}, y) = \lim_{m\to\infty} \min_{y \in Y(\overline{t})} (-\psi^m(\overline{t}), y) = \lim_{m\to\infty} (-\psi^m(\overline{t}), y^m(\overline{t})) = (-\overline{c}, \overline{y}). \quad (10)$$

Аналогічно можна показати, що $\max_{x \in X(\bar{t})} (\bar{c}, x) = (\bar{c}, \bar{x})$. Керування $\bar{v}(\cdot)$, яке визначається умовою (10), є екстремальним. Дійсно,

$$0 = \varphi(\bar{v}, \bar{v}) = \max_{t \in [0, \bar{t}]} (\bar{\psi}(t), \bar{x}(t) - y(t, \bar{v})) = \max_{t \in [0, \bar{t}]} \min_{v \in V} (\bar{\psi}(t), \bar{x}(t) - y(t, v)) =$$

$$= \min_{v \in V} = \max_{t \in [0, \bar{t}]} (\bar{\psi}(t), \bar{x}(t) - y(t, v)).$$

Послідовність керувань $v^m(\cdot)$ збігається за мірою на $[0, \bar{t}]$ до керування $\bar{v}(\cdot)$.

Нехай це не так. Тоді існує така множина $\tau \subset [0, \bar{t}]$, $\operatorname{mes} \tau > 0$, що для $t \in \tau$

$$\lim_{m \to \infty} v^m(t) \neq \bar{v}(t),$$

$$0 = \lim_{m \to \infty} (\bar{c}, \bar{y} - y^m(\bar{t})) = \lim_{m \to \infty} \int_0^{\bar{t}} (\bar{\psi}(t), B(t)(\bar{v}(t) - v^m(t)))\, dt =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \int_{\tau} (\bar{\psi}(t), B(t)(\bar{v}(t) - v^m(t)))\, dt > 0.$$

Одержана суперечність доводить теорему.

## ЛІТЕРАТУРА


1. В. Г. Болтянский, Математические методы оптимального управления, «Наука», М., 1969.
2. Б. Н. Пшеничный, Численный метод расчета оптимального по быстродействию управления для линейных систем, Журн. вычисл. матем. и матем. физики, № 1, 1964.
3. Б. Н. Пшеничный, О задаче преследования, Кибернетика, № 6, 1967.



Надійшла 24.VI 1971 р.


Інститут математики АН УРСР