УДК 517.53

Про структуру головних ідеалів в деяких банахових алгебрах аналітичних функцій

М. М. Осадчий

Однією з головних проблем при вивченні банахових алгебр (комутативних нормованих кілець) функцій є опис всіх замкнутих ідеалів даної алгебри. Повністю ця проблема розв'язана лише для небагатьох алгебр: алгебри $C(K)$ всіх неперервних функцій на компакті K, алгебри D_n всіх n разів неперервно диференційовних функцій [1], алгебри A функцій, неперервних в крузі $\overline{U}\{z : z \in \mathbf{C}, |z| \leqslant 1\}$ і аналітичних усередині цього круга [2] та деяких інших.

Наведемо тут результат Рудіна.

Нехай I — ненульовий замкнутий ідеал в A і E — множина точок одиничного кола $\Gamma\{|z| = 1\}$, в якій дорівнюють нулю всі функції $f \in I$. Нехай $G(z)$ — найбільший спільний дільник внутрішніх частин ненульових функцій із I. Тоді I збігається з множиною вигляду Gg, де g пробігає всі функції із A, що дорівнюють нулю на E.

Наскільки нам відомо, для інших кілець аналітичних функцій, крім кільця A, такого повного опису структури замкнутих ідеалів не існує.

В даній замітці даємо опис головних ідеалів для кілець H_n^2 $(n \geqslant 1)$ (означення див. нижче) при умові, що для елемента $f \in H_n^2$, що породжує ідеал I, множина $E\{z : |z| = 1, \ f(z) = 0\}$ не більш як зчисленна; у випадку, коли множина E скінченна, і при умові, що $f(z) = f'(z) = = \ldots = f^{(n-1)}(z) = 0$ $(z \in E)$, опис структури головних ідеалів одержано В. С. Королевичем [3]. Структуру головних ідеалів кільця H_1^2 у випадку, коли множина E зчисленна, описано в [4].

Означення 1 (див. також [5]). Простір $H_n^2 (n = 0, 1, \ldots)$ — клас аналітичних функцій $f(z)$, голоморфних в крузі $U\{|z| < 1\}$ і таких, що $f^{(n)}(z) \in H^2$, з нормою

$$\|f\|_{H_n^2} = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \|f^{(k)}\|_{H^2} = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \sup_{0 < r < 1} \left\{ \int_0^{2\pi} |[f(re^{i\theta})]^{(k)}|^2 d\theta \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

При $n \geqslant 1$ H_n^2 — банахова алгебра з одиницею $f(z) \equiv 1$, а при $n = 0$ одержуємо класичний простір $H_0^2 = H^2$, який не є алгеброю.

Як відомо [6, стор. 100], кожна функція $f(z) \in H^2$ допускає канонічну факторизацію

$$f(z) = B(z) \cdot S(z) \cdot F(z),$$

де $B(z)$ — функція Бляшке, $S(z)$ — сингулярна функція, $F(z)$ — зовнішня функція. Наслідуючи Берлінга, функцію $G(z) = B(z) . S(z)$ будемо називати внутрішньою частиною функції $f(z)$, а $F(z)$ — зовнішньою частиною цієї функції.

Означення 2. Нехай $E_0 \supseteq E_1 \supseteq \ldots \supseteq E_{n-1}$ — замкнуті множини на колі Γ, $G(z)$ — внутрішня функція. Позначимо $I\{G(z); E_0, E_1, \ldots, E_{n-1}\}$ множину функцій $g(z) \in H_n^2$, що задовольняють умови:

1) $g(z) = g'(z) = \ldots = g^{(j)}(z) = 0$ $(z \in E_j, j = 0, 1, \ldots, n-1)$;

2) $G(z)$ ділить $g(z)$, тобто, якщо $g(z) = G_1(z) \cdot F_1(z)$, то $\dfrac{G_1(z)}{G(z)}$ обмежена в крузі $|z| < 1$ функція.

Як показано в [3], $I\{G(z); E_0, E_1, \ldots, E_{n-1}\}$ — замкнутий ідеал (можливо, тривіальний). Якщо ідеал $I\{G(z); E_0, E_1, \ldots, E_{n-1}\}$ не тривіальний, то множина E_0 задовольняє умову Берлінга—Карлесона, тобто $\operatorname{mes} E_0 = 0$ і $\sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \log \dfrac{1}{\tau_k} < \infty$, де $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність довжин доповняльних дуг множини E_0.

Сформулюємо основну теорему даної замітки.

Теорема 1. *Нехай $f(z)$ — довільна функція із H_n^2, що має на колі Γ не більш як зчисленну множину нулів E_0. Позначимо*

$$E_j\{z : |z| = 1, \; f(z) = f'(z) = \ldots = f^{(j)}(z) = 0\}, \; j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Нехай далі канонічна факторизація $f(z)$ має вигляд:

$$f(z) = B(z) \cdot S(z) \cdot F(z),$$

де $B(z) \cdot S(z) = G(z)$ — внутрішня частина функції $f(z)$, а $F(z)$ — її зовнішня частина. Тоді ідеал $I(f)$, породжений функцією $f(z)$, тотожний ідеалу $I = I\{G(z); E_0, E_1, \ldots, E_{n-1}\}$.

Доведення теореми 1 проводиться в три етапи: спочатку розглядається випадок, коли $E_0 = \bigcap_{g \in I} \{z : |z| = 1, \; g(z) = g'(z) = \ldots = g^{(n-1)}(z) = 0\}$, потім, коли множина E_0 / E_{n-1} скінченна і, нарешті, коли множина E_0 / E_{n-1} зчисленна.

Для доведення першого етапу теореми 1 використовується метод Карлемана, який він застосував в 1926 році для доведення такої теореми, сформульованої тут в термінах теорії кілець: в *кільці A ідеал, породжений функцією u (z), що не має логарифмічного лишку і дорівнює нулю лише при* $z=1$, *збігається з максимальним ідеалом, який відповідає точці* $z = 1$.

Пізніше метод Карлемана застосували Л. В. Шамраєва [7] для доведення теореми про структуру головних примарних ідеалів кільця функцій, регулярних в крузі і диференційовних на його границі, і В. С. Королевич в уже згаданій роботі [3]. Метод Карлемана використано нами також в роботі [4].

Досить важливу роль при доведенні першого етапу теореми 1 відіграють теорема про збереження класу при діленні на внутрішню частину (див. [5]) і сформульована нижче теорема 2 (апроксимації).

Теорема 2. *Для довільної функції* $g(z)\in H_n^2$, *що дорівнює нулю разом з усіма своїми похідними до* $(n-1)$*-го порядку включно на не більш як зчисленній замкнутій множині* $E_0\subset\Gamma\{|z|=1\}$, *для всякого* $\varepsilon>0$ *знайдеться функція* $K_\varepsilon(z)\in H_n^2$ *така, що при*

$$\rho(z)\to 0\ \ (|z|=1),\ \ K_\varepsilon^{(j)}(z)=o\left(\rho^{2n-2j}(z)\right),\ \ j=0,1,\ldots,n-1,$$

де $\rho(z)=\min\limits_{\zeta\in E_0}|z-\zeta|$, *причому* $\|gK_\varepsilon-g\|_{H_n^2}<\varepsilon$.

Для доведення другого етапу теореми 1 в основному використовуються алгебраїчні методи, а доведення третього етапу випливає із теореми 3.

Теорема 3. *Нехай* $g(z)$ *довільна функція, що належить ідеалу* $I\{G(z);\ E_0,E_1,\ldots,E_{n-1}\}\ (E_0\neq E_{n-1})$. *Тоді для всякого* $\varepsilon>0$ *знайдеться функція* $g_\varepsilon(z)\in I\{G(z);\ E_0,\widetilde{E}_1,\ldots,\widetilde{E}_{n-1}\}$, *де* $E_j\subseteq\widetilde{E}_j,\ j=1,\ldots,n-1$, *причому множина* $E_0\diagdown\widetilde{E}_{n-1}$ *скінченна, що*

$$\|g_\varepsilon(z)-g(z)\|_{H_n^2}<\varepsilon.$$

Якщо множина E_0 скінченна, то теорема 2 фактично доведена в [4], а теорема 3 очевидна. Тому доведення цих теорем необхідне для випадку, коли множина E_0 зчисленна*. Воно спирається на кілька лем і трансфінітну індукцію.

Для того щоб сформулювати необхідні нам леми, введемо деякі позначення. Занумеруємо доповняльні дуги $S_k\ (k=1,2,\ldots)$ множини E_0 в порядку спадання їх довжин τ_k. Кінцями цих дуг є або ізольовані точки множини E_0, або ж односторонні граничні точки цієї множини. Якщо кінець A_k дуги S_k знаходиться відносно другого кінця A_k' цієї дуги так, що рух по S_k від точки A_k' до точки A_k відбувається проти годинникової стрілки, то A_k позначимо через $e^{i\theta_k}$, а $A_k'-e^{i\theta_k'}$.

Покладемо

$$K(z)=K_1(z)\cdot K_2(z),\tag{1}$$

де

$$K_1(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left[\frac{z-e^{i\theta_k}}{z-(1+\tau_k)e^{i\theta_k}}\right]^{\log\frac{1}{\tau_k}+1},\ \ K_2(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left[\frac{z-e^{i\theta_k'}}{z-(1+\tau_k)e^{i\theta_k'}}\right]^{\log\frac{1}{\tau_k}+1}.$$

Лема 1. *Існує стала* c_0 *така, що при* $c\geqslant c_0$ $K^c(z)\in H_n^2$, *причому, як тільки* $\rho(z)\to 0\ (|z|=1)$, *то*

$$|[K^c(z)]^{(j)}|=o\left(\rho^{2n-2j}(z)\right)\ \ (j=0,1,\ldots,n-1)$$

* Для $n=1$ доведення теореми 2 див. в [4].

Для доведення леми 1 використовуємо конструкцію функції $K(z)$ і умову Берлінга—Карлесона.

Введемо функцію

$$\Phi_w^{2n}(z;\alpha) = \left[\frac{z - e^{iw}}{z - (1+\alpha)e^{iw}}\right]^{2n}, \tag{2}$$

де e^{iw} — довільна точка множини E_0.

Лема 2. *Для всякого $\varepsilon > 0$ і довільної функції $g(z) \in H_n^2$, що дорівнює нулю разом з усіма своїми похідними до $(n-1)$-го порядку включно в точках множини E_0, знайдеться $\alpha_\varepsilon > 0$, що при всіх $\alpha \leqslant \alpha_\varepsilon$*

$$\| \Phi_w^{2n}(z;\alpha)\, g(z) - g(z) \|_{H_n^2} < \varepsilon$$

для всіх w таких, що $e^{iw} \in E_0$.

При доведенні леми 2 істотно використовується той факт, що

$$| [g(e^{iw}\cdot e^{i\tau})]^{(j)} | = o\left(|\tau|^{n-j-\frac{1}{2}}\right) \ (\tau \to 0,\ j = 0, 1, \ldots, n-1)$$

рівномірно щодо e^{iw}.

Застосовуючи принцип стаціонарності Кантора — Бера і враховуючи зчисленність множини E_0 переконуємось, що для довільної сукупності замкнутих множин $E_0 \supseteq E_1 \supseteq \ldots \supseteq E_{n-1}$, заданих ідеалом $J\{G(z); E_0, E_1, \ldots, E_{n-1}\}$, існує таке трансфінітне число ν, що множина $(\overline{E_0 \setminus E_{n-1}})^{(\nu)}$ скінченна. Сформулюємо тепер таку лему.

Лема 3. *Для довільної функції $g(z) \in I\{G(z); E_0, E_1, \ldots, E_{n-1}\}$, де множина $(\overline{E_0 \setminus E_{n-1}})^{(\nu)}$ скінченна, і всякого $\varepsilon > 0$ знайдеться функція $D(z) \in I\{G(z); E_0, K_1, \ldots, K_{n-1}\}$, де $K_j \supseteq E_j$, $j = 1, \ldots, n-1$ і $(\overline{E_0 \setminus K_{n-1}})^{(\nu)} = \varnothing$, що*

$$\| D(z) - g(z) \|_{H_n^2} < \varepsilon.$$

Лему 3 достатньо довести для випадку, коли множина $(\overline{E_0 \setminus E_{n-1}})^{(\nu)}$ складається лише з однієї точки e^{iv}. Це доведення використовує властивості функцій $K^c(z;\delta)\cdot\Phi(z;\alpha,\delta)$, де для кожного δ $K(z;\delta)$ — функція виду (1), нулі якої збігаються з множиною $\overline{E_0 \setminus E_{n-1}} \cap \overline{S}_\delta$ ($\overline{S}_\delta \in \mathfrak{R}$, $\operatorname{mes} S_\delta = \delta$), а $\Phi(z;\alpha,\delta)$ — добуток функцій виду (2) є нулями, що збігаються з кінцями дуги S_δ. Через $\mathfrak{R}$ ми позначили спеціально вибрану множину дуг, кожна з яких містить точку e^{iv}, при $\delta' \leqslant \delta''$ $\overline{S}_{\delta'} \subseteq \overline{S}_{\delta''}$ і $\operatorname{mes} \max\limits_{S_\delta \in \mathfrak{R}} \{S_\delta\} = \delta_0$ — досить мале додатне число.

Леми 1 і 2 використовуються в доведенні теореми 2, а леми 1 і 3 в доведенні теореми 3.

Автор щиро вдячний Б. І. Коренблюму за цінні поради і постійну увагу до роботи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Г. Е. Шилов, О регулярных нормированных кольцах, Тр. Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, вып. 21, 1947.
2. W. Rudin, The closed ideals in an algebra of continuous functions, Can. J. Math., 9, 3, 1957.
3. В. С. Королевич, Некоторые банаховы алгебры аналитических функций, Изв. АН АрмССР, сер. «Математика», № 4, 1970.

4. Н. М. Осадчий, Структура главных идеалов одного кольца аналитических функций, УМЖ, т. 23, № 6, 1971.
5. Б. И. Коренблюм, В. С. Королевич, Об аналитических функциях, регулярных в круге и гладких на его границе, Матем. заметки, т. 7, № 2, 1970.
6. К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, ИЛ, М., 1963.
7. Л. В. Шамраева, Главные примарные идеалы кольца функций, регулярных в круге и дифференцируемых на его границе, УМЖ, т. 21, № 2, 1969.

Надійшла 10.V 1971 р.
Київський інженерно-будівельний інститут