УДК 517.944

Умови єдиності розв'язку задачі Коші у випадку спеціальних систем рівнянь зі змінними коефіцієнтами

М. М. Чаус

Дана замітка присвячена перенесенню результатів робіт [1, 2] автора на системи рівнянь більш загального виду, ніж в названих роботах. Як і раніше, ми скористаємось наведеним в [1, 2] прийомом, за допомогою якого питання єдиності для випадку рівнянь зі змінними коефіцієнтами зводиться до аналогічного питання для випадку рівнянь із сталими коефіцієнтами*.

Введемо необхідні позначення.

Нехай

$$L = L\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_m}, \alpha_{m+1}\frac{\partial^2}{\partial y_{m+1}^2}, \ldots, \alpha_n \frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right)$$

є $r \times r$-матриця, елементи якої є поліноми із сталими коефіцієнтами від змінних

$$\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_m}, \alpha_{m+1}\frac{\partial^2}{\partial y_{m+1}^2}, \ldots, \alpha_n \frac{\partial^2}{\partial y_n^2}, \tag{1}$$

$\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ — точки комплексної площини.

Нехай $p > 1$ — зведений порядок системи рівнянь

$$\frac{\partial v(y,t)}{\partial t} = Lv(y, t), \qquad y = (y_1, \ldots, y_n). \tag{2}$$

Система рівнянь, якою ми будемо займатися, одержується з вихідної системи (2) заміною в L змінних (1) деякими диференціальними виразами зі змінними коефіцієнтами. Для проведення цієї процедури позначимо

$$X^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}), \qquad k = 1, \ldots, n,$$

* Бібліографію до цього питання дивіться в [2].

де на виміри n_k накладемо обмеження $n_k \geqslant 1$ при $k = 1, \ldots, m$ і $1 \leqslant n_k \leqslant 3$ при $k = m+1, \ldots, n$.

Надалі будемо позначати

$$P_{m_k}(X^{(k)}) = \frac{\partial}{\partial x_1^{(k)}} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_{m_k}^{(k)}} + p_k(X^{(k)}), \qquad m_k \leqslant n_k, \qquad k = 1, \ldots, m,$$

$$Q(X^{(k)}) = \alpha_k \Delta(X^{(k)}) + q_k(X^{(k)}), \qquad k = m+1, \ldots, n,$$

де $p_k(X^{(k)})$ — неперервні комплекснозначні функції від змінних $x_1^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}$, $\Delta(X^{(k)})$ — вираз Лапласа за відповідними змінними, $q_k(X^{(k)})$ — комплекснозначні функції, що мають неперервні другі частинні похідні.

Тепер в матриці L замінимо змінну $\dfrac{\partial}{\partial y_k}$ на вираз $P_{m_k}(X^{(k)})$, а $\alpha_k \dfrac{\partial^2}{\partial y_k^2}$ — на $Q(X^{(k)})$. Одержимо нову матрицю $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L} = L(P_{m_1}(X^{(1)}), \ \ldots, P_{m_m}(X^{(m)}), \ Q(X^{(m+1)}), \ldots, Q(X^{(n)})).$$

Ставиться питання про знаходження класів єдиності розв'язку задачі Коші для системи рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\mathfrak{X}, t) = \mathbf{L} U(\mathfrak{X}, t), \tag{3}$$

де позначено $\mathfrak{X} = (X^{(1)}, \ldots, X^{(n)})$.

В теоремі, що доводиться нижче, будуть фігурувати мажоранти для введених вище функцій $p_k(X^{(k)})$ і $q_k(X^{(k)})$. А саме, надалі позначатимемо $p_k^0(X^{(k)})$ і $q_k^0(t)$ додатні неспадні за кожною із змінних x_i, $t > 0$ функції, для яких

$$p_k^0(|x_1^{(k)}|, \ldots, |x_{n_k}^{(k)}|) \geqslant |p_k(X^{(k)})|, \qquad k = 1, \ldots, m,$$

$$q_k^0(\|X^{(k)}\|) \geqslant q_k(X^{(k)}), \qquad k = m+1, \ldots, n, \qquad \left(\|X^{(k)}\|^2 = \sum_{i=1}^{n_k} |x_i^{(k)}|^2\right).$$

Теорема. *Припустимо, що за функції* $p_k^0(x_1^{(k)}, \ldots, x_{m_k}^{(k)}; \ x_{m_k+1}^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ $(k = 1, \ldots, m)$ *і* $q_k^0(t)$ $(k = m+1, \ldots, n)$ *можуть бути взяті такі функції, що* $y p_k^0(y, \ldots, y; r, \ldots, r)$ *при кожному фіксованому* $r > 0$ *є разом з* $y\sqrt{q_k^0(y)}$ *випукла донизу функція по* $y > 0$ *і виконуються умови:*

$$\int_1^\infty \frac{dy}{p_k^0(y, \ldots, y; r, \ldots, r)^{p-1}} = \infty, \qquad \int_1^\infty \frac{dy}{q_k^0(y)^{\frac{p-1}{2}}} \quad \infty,$$

де $p > 1$ *— зведений порядок системи* (2).

Тоді всякий розв'язок $U(\mathfrak{X}, t)$ *системи* (3) *в смузі* $[0,T] \times E_{n_1} \times \ldots \times E_{n_n}$, *що задовольняє початкову умову і оцінку*

$$|U(\mathfrak{X}, t)| \leqslant C \exp\left\{A \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m_k \\ m_k < i \leqslant n_k}} |x_j^{(k)}| \, p_k^0(|x_j^{(k)}|, \ldots, |x_j^{(k)}|; \ |x_i^{(k)}|, \ldots, |x_i^{(k)}|) + \right.$$

$$\left. + A \sum_{k=m+1}^{n} \|X^{(k)}\| \cdot \sqrt{q_k^0(\|X^{(k)}\|)} \right\} \qquad (C, A > 0),$$

тотожно рівний нулю.

Наприклад, розв'язок задачі Коші

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x)\right]^k u(x, t), \qquad u(x, 0) = 0,$$

визначений в смузі $t \in [0, T]$, $-\infty < x < \infty$, буде тривіальним, якщо

$$|u(x, t)| \leqslant C \exp\left(A|x|\sqrt{q^0(|x|)}\right),$$

$$\text{де} \int_1^\infty \frac{dy}{q^0(y)^{k-\frac{1}{2}}} = \infty \quad \text{і} \quad |q(x)| \leqslant q^0(|x|).$$

Основну роль при доведенні теореми будуть грати спеціальні функції, яким присвячені наступні дві леми.

Лема 1. *Розглянемо рівняння*

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + aq(x)\varphi(x, y) \qquad (-\infty < x,\ y < \infty), \tag{4}$$

де $q(x)$ може зростати при $|x| \to \infty$ не швидше деякого степеня $|x|$, a — точка комплексної площини.

Для кожної досить гладкої фінітної функції $\varphi_0(x)$ існує розв'язок $\varphi(x, y)$ даного рівняння, який задовольняє умови:

а) $\varphi(x, y)|_{y=0} = \varphi_0(x)$;

б) $\varphi(x, y)$ *при кожному фіксованому y є фінітна функція по x;*

в) *для всіх досить великих $|x|$, $|y|$ ($|x| > R$, $|y| > R$) при довільному $A_2 > 0$ з деякими $A_1 > A_2$, $M > 0$*

$$|\varphi(x, y)| \leqslant M \exp\left\{A_1|y|\sqrt{q^0(2|y|)} - A_2|x|\sqrt{q^0(|x|)}\right\},$$

де $q^0(t)$ — зростаюча функція при $t > 0$ така, що $|q(x)| \leqslant q^0(|x|)$.

Доведення леми. Визначимо для кожної точки (x_0, y_0) область $\Omega_0 = \Omega(x_0, y_0)$, що складається з точок $(x, y) = (x_0 + \lambda(y_0 - y), y)$, де λ змінюється від -1 до 1, а y — від 0 до y_0. Введемо простір $C(\Omega_0)$ неперервних на Ω_0 функцій $\varphi(x, y)$ з нормою $\|\varphi\|_{\Omega_0} = \max\limits_{\Omega_0}|\varphi(x, y)|$. Розглянемо рівняння

$$\varphi = \varphi_0 + A\varphi, \tag{4'}$$

$$\text{де} \qquad (A\varphi)(x, y) = \frac{a}{2}\int_0^y d\eta \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} q(\xi)\varphi(\xi, \eta)\,d\eta, \qquad \varphi_0(x, y) = \varphi_0(x + y).$$

Шукаючи розв'язок рівняння (4′) в $C(\Omega_0)$ методом послідовних наближень ($\varphi_n = \varphi_0 + A\varphi_{n-1}$), приходимо до висновку, що він існує, причому

$$|\varphi(x_0, y_0)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |(A^n\varphi_0)(x_0, y_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\Omega_0}|\varphi_0(x + y)| \cdot \exp\left\{|y|\sqrt{|a|\max_{\Omega_0}|q(\xi)|}\right\}.$$

Ця оцінка має місце при довільних x_0, y_0. Зокрема, оскільки $\varphi_0(x) \equiv 0$ при $|x| > r$, то $\max\limits_{\Omega_0}|\varphi_0(x + y)| = 0$ і, як наслідок, $\varphi(x_0, y_0) = 0$ при $|x_0| > |y_0| + r$. Ми бачимо, що для одержаного розв'язку $\varphi(x, y)$ в деякій частині площини виконується умова в) леми 1. В частині площини, що залишилася, тобто при $|x_0| \leqslant |y_0| + r$, ми продовжимо одержану вище загальну оцінку для $|\varphi(x_0, y_0)|$, вводячи мажоранту $q^0(\xi)$. Це зразу дає $\max\limits_{\Omega_0} |q(\xi)| \leqslant q^0(|x_0| + |y_0|)$, звідки

$$|\varphi(x_0, y_0)| \leqslant M \exp\{|y_0| \sqrt{|a| q^0(|x_0| + |y_0|)}\} \leqslant$$

$$\leqslant M \exp\{|y_0| \sqrt{|a| q^0(2|y_0| + r)}\} \leqslant M \exp\{(|y_0| + r) \sqrt{|a| q^0(2|y_0| + r)}\} \leqslant$$

$$\leqslant M \exp\{A(|y_0| + r) \sqrt{q^0(2|y_0| + r)} - (A - 1)|x_0| \sqrt{q^0(|x_0|)}\}.$$

Таким чином, розглядувана функція $\varphi(x, y)$ задовольняє умову в) леми 1. Умови а) і б) вона теж, зрозуміло, буде задовольняти. Лишилось зазначити, що розглядуваний розв'язок $\varphi(x, y)$ рівняння (4′) буде розв'язком рівняння (4). Лему доведено.

Якщо замість рівняння (4) розглянути рівняння виду

$$\frac{\partial^2 \varphi(X, y)}{\partial y^2} = \Delta(X) \varphi(X, y) + a q(X) \varphi(X, y), \tag{5}$$

де $X \in E_n$ $(n = 2, 3)$, то для нього можна довести аналогічну лему про існування у всьому просторі $(-\infty < y < \infty, \quad X \in E_n)$ розв'язку $\varphi(X, y)$ з умовами а) — в). Для цього, використавши добре відомі формули для розв'язку гіперболічних рівнянь з правою частиною, складаємо за даним рівнянням (5) відповідне інтегральне рівняння $\varphi = \varphi_0 + A\varphi$, після чого метод послідовних наближень приводить нас до існування потрібних розв'язків $\varphi(X, y)$. За початкову фунцію $\varphi_0(X)$ можна взяти розв'язок задачі

$$\frac{\partial^2 \varphi(X, y)}{\partial y^2} = \Delta(X) \varphi(X, y), \;\; \varphi_0(X, 0) = \varphi_0(X) \in C_0^\infty(E_n), \;\; \left.\frac{\partial \varphi_0(X, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0.$$

При цьому для $|\varphi(X, y)|$ буде одержано таку оцінку:

$$|\varphi(X, y)| \leqslant M \exp\{A_1 |y| \sqrt{q^0(2|y|)} - A_2 \|X\| \sqrt{q^0(\|X\|)}\},$$

де $q^0(t)$ — неспадна при $t > 0$ мажоранта для $q(X)$:

$$|q(X)| \leqslant q^0(\|X\|), \qquad \|X\|^2 = \sum_i |x_i|^2.$$

Позначимо $Q^+(X^{(k)})$ $(k = m + 1, \ldots, n)$ формально спряжений вираз до раніше введеного виразу $Q(X^{(k)})$. Рівняння

$$\bar{\alpha}_k \frac{\partial^2 \varphi(X^{(k)}, y_k)}{\partial y_k^2} = Q^+(X^{(k)}) \varphi(X^{(k)}, y_k)$$

є рівняння виду (5). В даному випадку його розв'язки, що задовольняють умови а) — в) леми 1 позначимо $\varphi_k(X^{(k)}, y_k)$ і $\varphi_k(X^{(k)}, 0) = \varphi_k^0(X^{(k)})$.

Лема 2. *Розглянемо рівняння*

$$\frac{\partial \varphi(X, y)}{\partial y} = P\varphi(X, y), \quad P = -\frac{\partial}{\partial x_1} - \ldots - \frac{\partial}{\partial x_m} + p(x_1, \ldots, x_n) \quad (m \leqslant n).$$

Для кожної гладкої фінітної по x_i $(i = 1, \ldots, n)$ функції $\varphi^0(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^0(X)$ існує розв'язок даного рівняння, що задовольняє умови:

а) $\varphi(X, 0) = \varphi^0(X)$;

б) $\varphi(X, y)$ *при кожному фіксованому* y *є фінітна функція по* x_i $i = 1, \ldots, n$;

в) *при досить великих* $|x_1| + \ldots + |x_n|$ *і* $|y|$ *для довільного* $A_2 > 0$ *з деякими* $A_1 > A_2$, $M > 0$

$$|\varphi(X, y)| \leqslant M \exp \Big\{ A_1 |y| p^0(|y|, \ldots, |y|; r, \ldots, r) -$$

$$- A_2 \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ m < i \leqslant n}} |x_j| p^0(|x_j|, \ldots, |x_j|; |x_i|, \ldots, |x_i|),$$

де $p^0(x_1, \ldots, x_n) > 0$ — *неспадна мажоранта для* $p(x_1, \ldots, x_n)$ *при* $x_i > 0$.

Доведення леми міститься в [2].

Позначимо $P^+_{m_k}(X^{(k)})$ $(k = 1, \ldots, m)$ формально спряжений вираз до $P_{m_k}(X^{(k)})$. Якщо в лемі 2 $P = P^+_{m_k}(X^{(k)})$, то відповідні розв'язки з властивостями а) — в) будемо позначати $\varphi_k(X^{(k)}, y_k)$ і $\varphi_k(X^{(k)}, 0) = \varphi^0_k(X^{(k)})$.

Тепер візьмемо деякий набір функцій $\varphi_k(X^{(k)}, y_k)$, $(k = 1, \ldots, n)$ і позначимо

$$\Phi(\mathfrak{X}, Y) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(X^{(k)} y_k).$$

На основі лем 1 і 2 для $\Phi(\mathfrak{X}, Y)$ виконується оцінка

$$|\Phi(\mathfrak{X}, Y)| \leqslant C \exp \Big\{ A_1 \sum_{k=1}^{m} |y_k| p^0_k(|y_k|, \ldots, |y_k|; r_k, \ldots, r_k) +$$

$$+ A_1 \sum_{k=m+1}^{n} |y_k| \sqrt{q^0_k(2|y_k|)} - A_2 \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m_k \\ m_k < i \leqslant n_k}} |x^{(k)}_j| p^0_k(|x^{(k)}_j|, \ldots, |x^{(k)}_j|;$$

$$|x^{(k)}_i|, \ldots, |x^{(k)}_i|) - A_2 \sum_{k=m+1}^{n} \|X^{(k)}\| \sqrt{q^0_k(\|X^{(k)}\|)} \Big\}, \qquad (6)$$

яка має місце при довільному A_2, якщо підібрати належним чином $A_1 > A_2$, $r_k > 0$. Зауважимо також, що кожна $\Phi(\mathfrak{X}, Y)$ визначається набором початкових функцій $\varphi^0_k(X^{(k)})$ $(k = 1, \ldots, n)$. Завдяки тому, що в ролі $\varphi^0_k(X^{(k)})$ виступають усі досить гладкі фінітні функції, множина функцій $\Phi(\mathfrak{X}, 0) = \prod_{k=1}^{n} \varphi^0_k(X^{(k)})$, зрозуміло, буде досить багата за їх запасом. Це означає, що із абсолютної збіжності інтеграла $\int U(\mathfrak{X}) \Phi(\mathfrak{X}, 0) d\mathfrak{X}$ і рівності його нулю зразу для всіх $\Phi(\mathfrak{X}, 0)$ випливає, що $U(\mathfrak{X}) \equiv 0$. Очевидною властивістю функції $\Phi(\mathfrak{X}, Y)$ є також те, що вона задовольняє кожне рівняння, розв'язком якого визначалась функція $\varphi_k(X^{(k)}, y_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Д о в е д е н н я т е о р е м и. Нехай $U(\mathfrak{X}, t) = \{u_i(X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}, t)\}^r_{i=1}$ — розв'язок системи рівнянь (3), що задовольняє умови теореми. Візьмемо одну з функцій $\Phi(\mathfrak{X}, Y)$ і розглянемо вектор-функцію $V = \{v_i(y_1, \ldots, y_n, t)\}^r_{i=1}$, де

$$v_i(Y, t) = (u_i(\mathfrak{X}, t), \Phi(\mathfrak{X}, Y)) = \int\limits_{E_{n_1} \times \ldots \times E_{n_n}} u_i(\mathfrak{X}, t) \overline{\Phi(\mathfrak{X}, Y)} d\mathfrak{X}.$$

З оцінок (6) для $\Omega(\mathfrak{X}, Y)$ випливає, що $v_i(B, t)$ існує і що

$$|v_i(Y, t)| \leqslant C_1 \exp\left\{A_1 \sum_{k=1}^{m} |y_k| p_k^0(|y_k|, \ldots, |y_k|; r_k, \ldots, r_k) + \right.$$

$$\left. + A_2 \sum_{k=m+1}^{n} |y_k| \sqrt{q_k^0(2|y_k|)}\right\}, \tag{7}$$

де, нагадаємо, p_k^0, q_k^0 — функції, що задовольняють умови теореми.

Для похідної по t, враховуючи фінітність $\Phi(\mathfrak{X}, Y)$ по $\mathfrak{X}$, одержимо

$$\frac{\partial v_i(Y, t)}{\partial t} = \left(\frac{\partial u_i(\mathfrak{X}, t)}{\partial t}, \ \Phi(\mathfrak{X}, Y)\right) = (\mathbf{L}_{i1} u_1(\mathfrak{X}, t) + \ldots + \mathbf{L}_{ir} u_r(\mathfrak{X}, t), \Phi) =$$

$$= (u_1, \mathbf{L}_{i1}^{+}\Phi) + \ldots + (u_r, \mathbf{L}_{ir}^{+}\Phi),$$

де $\mathbf{L}_{ij}$ — відповідний елемент матриці $\mathbf{L}$.

Неважко зрозуміти, що

$$\mathbf{L}_{ij}^{+}\Phi = L_{ij}(P_{m_1}^{+}(X^{(1)}), \ldots, P_{m_m}^{+}(X^{(m)}), \ Q^{+}(X^{(m+1)}), \ldots, Q^{+}(X^{(n)}))\Phi =$$

$$= \overline{L}_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial}{\partial y_m}, \ \overline{\alpha}_{m+1} \frac{\partial^2}{\partial y_{m+1}^2}, \ \ldots, \ \overline{\alpha}_n \frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right)\Phi,$$

де L_{ij} — відповідний елемент матриці L, а риска над L_{ij} позначає заміну сталих коефіцієнтів полінома L_{ij} на комплексно спряжені. Завдяки цьому

$$(u_i, \ \mathbf{L}_{ij}^{+}\Phi) = L_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial}{\partial y_m}, \ \alpha_{m+1} \frac{\partial^2}{\partial y_{m+1}^2}, \ \ldots, \ \alpha_n \frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right)\Phi$$

і, як наслідок,

$$\frac{\partial v_i(Y, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{r} L_{ij} v_i(Y, t).$$

Крім того, очевидно, $V(Y, 0) = 0$. Таким чином, наша вектор-функція $V(Y, t)$ є розв'язком задачі Коші для системи рівнянь (2) із сталими коефіцієнтами і з нульовими початковими даними. Враховуючи оцінки (7), одержуємо $V(Y, t) \equiv 0$. Зокрема $v_i(0, t) = (u_i(\mathfrak{X}, t), \Phi(\mathfrak{X}, Y)) \equiv 0$, що має місце для довільної $\Phi(\mathfrak{X}, 0)$. Звідси випливає, що $u_i(\mathfrak{X}, t) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, r)$. Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. Н. Чаус, О единственности решения задачи Коши для уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, ДАН СССР, т. 191, № 6, 1970.
2. Н. Н. Чаус, О единственности решения задачи Коши для некоторых систем уравнений с переменными коэффициентами, УМЖ, т. 23, № 1, 1971.

Надійшла 13.I 1971 р.

Інститут математики АН УРСР