1972 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 24, № 4
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.535.4

Предельное значение нижнего индикатора и оценки снизу для целых функций с положительными нулями

А. А. Кондратюк, А. Н. Фридман

1. Пусть $f(z)$ — целая функция конечного порядка ρ с положительными нулями, $n(r)$ — число нулей функции $f(z)$ на отрезке $[0, r]$. $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок [1, стр. 47] такой, что $\rho(r) \to \rho$ при $r \to \infty$ и

$$\sup_{r>0} \frac{n(r)}{r^{\rho(r)}} \leqslant \Delta. \tag{1}$$

Всюду в дальнейшем предполагаем, что условие (1) выполняется.

Обозначим

$$h(\varphi) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}}.$$

Функция $h(\varphi)$ называется нижним индикатором, а функция $-h(\varphi)$ — коиндикатором функции $f(z)$.

Обозначим $p = [\rho]$. Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Если $f(z)$ — целая функция нецелого порядка ρ с положительными нулями, то*

$$\lim_{\varphi\to 0} h(\varphi) = \lim_{\xi\to 1-0} \varliminf_{r\to\infty} \frac{1}{r^{\rho(r)}} \int_0^{\xi} \frac{t^{-p-1} n(rt) - t^{p} n\left(\frac{r}{t}\right)}{1-t}\, dt. \tag{2}$$

Формула (2) дает предельное значение при $\varphi \to 0$ нижнего индикатора как функцию числа нулей целой функции $f(z)$. Эта формула была получена Э. Байет [2] в случае $\rho(r) \equiv \frac{1}{2}$ и авторами [3] в случае $\rho < 1$.

Теорема 1 дает также критерий ограниченности нижнего индикатора целой функции $f(z)$ нецелого порядка с положительными нулями в терминах ее нулей (ср. [4]).

В случае целого порядка, если измерить индикатор $h(\varphi)$ относительно некоторого уточненного порядка, который связан с $\rho(r)$ определенными формулами, то функция $h(\varphi)$ будет ограниченной [5]. Поэтому исследуем здесь только случай нецелого порядка.

Обозначим последовательность нулей $\{a_k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, целой функции $f(z)$ через Λ, а величину, стоящую в правой части (2), через A. Обозначим также $r^{\rho(r)} = V(r)$.

Из теоремы 1 получается следующая равномерная оценка величины $\ln|f(z)|$ снизу вне некоторого C_0-множества кружков нулевой линейной плотности на плоскости z (определение см. [1, стр. 120]).

Теорема 2. *Если $f(z)$ — целая функция с положительными нулями порядка $0 < \rho < 1$ и $A_\Lambda > -\infty$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует C_0-множество, вне которого выполняется*

$$(A_\Lambda - \varepsilon) V(|z|) < \ln |f(z)|. \tag{3}$$

Покажем сначала, как из теоремы 1 следует теорема 2.

Пусть $0 < |\varphi| \leqslant \pi$. Известно, что при $0 < \rho < 1$ выполняется $h(\varphi) = h(-\varphi)$ и функция $h(\varphi)$ — неубывающая на $(0, \pi]$ (см., например, [3]). Таким образом, $A_\Lambda \leqslant h(\varphi)$. Отсюда и из определения $h(\varphi)$ следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $r_\varepsilon(\varphi)$ такое, что при $r > r_\varepsilon(\varphi)$ выполняется

$$(A_\Lambda - \varepsilon) V(|z|) < \ln |f(z)|, \ \arg z = \varphi. \tag{3'}$$

Из теоремы о равностепенной непрерывности [1, стр. 128] семейства функций

$$h_r(\varphi) = \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{V(r)}$$

и из неравенства (3′) вытекает, что для $\eta > 0$ существует множество кружков C_η с верхней линейной плотностью $\mu(C_\eta)$, не превосходящей η, такое, что неравенство (3) выполняется вне множества C_η. Переход к C_0-множеству осуществим аналогично тому, как это сделано в [1, стр. 133] (см. также [6, стр. 471]).

Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ и произвольной последовательности положительных чисел $\{\eta_k\}$, $\eta_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$ найдем последовательность таких множеств кружков C_{η_k}, $k = 1, 2 \ldots$, что их верхняя линейная плотность $\mu(C_{\eta_k}) < \eta_k$ и при $z \overline{\in} C_{\eta_k}$ выполняется (3). Обозначим через $\sum\limits_{|z_j^{(k)}| < |z|} \delta_j^{(k)}$ сумму радиусов $\delta_j^{(k)}$ тех кружков из множества C_{η_k}, центры которых $z_j^{(k)}$ находятся в круге радиуса $|z|$. Так как $\mu(C_{\eta_k}) < \eta_k$, то при достаточно больших значениях $|z|$ выполняется

$$\sum_{|z_j^{(k)}| < |z|} \delta_j^{(k)} \leqslant 2\eta_k |z|. \tag{4}$$

Выберем последовательность положительных чисел R_k такую, что $R_{k+1} > (k+1) R_k$ и при $|z| \geqslant R_k$ выполняется неравенство (4). Выделим из каждого множества C_{η_k} те кружки, центры которых удовлетворяют неравенству

$$R_k \leqslant |z_j^{(k)}| < R_{k+1},$$

и совокупность всех таких кружков обозначим через C. Это множество является C_0-множеством. Действительно, если перенумеровать кружки из C и обозначить через z_j центр, а через δ_j радиус кружка с номером j, то при

$$R_k \leqslant |z| < R_{k+1}$$

будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{|z|} \sum_{|z_j| < |z|} \delta_j < \frac{2\eta_1}{2 \cdot 3 \ldots k} + \frac{2\eta_2}{3 \cdot 4 \ldots k} + \ldots + \frac{2\eta_{k-1}}{k} + 2\eta_k \leqslant \frac{2\eta_1 e}{k} + 2\eta_k$$

и, следовательно, $\mu(C)=0$. Кроме того, при $z\overline{\in}C$ выполняется неравенство (3). Тем самым теорема 2 доказана.

С помощью таких же рассуждений можно получить, что в случае нецелого порядка $\rho>1$ теорема 2 имеет место, если в левой части (3) вместо A_Λ взять $L=\inf\limits_{0<|\varphi|\leqslant\pi} h(\varphi)>-\infty$.

Пусть $\{C_0\}$ — класс C_0-множеств. При $re^{i\varphi}\overline{\in}C$, $C\in\{C_0\}$ положим

$$h_c(re^{i\varphi})=\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{V(r)}.$$

Рассмотрим обобщенный нижний индикатор [4, 7]

$$h^*(\varphi)=\sup_{C\in\{C_0\}}\varliminf_{r\to\infty} h_c(re^{i\varphi}).$$

Теорема 3. *Для всякой целой функции $f(z)$ с положительными нулями нецелого порядка ρ выполняется*

$$h^*(0)=A_\Lambda.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

Замечание 1. Используя результаты [4, теорема A, стр. 855], можно получить утверждение, в некотором смысле обратное к теореме 2. А именно: *если вне некоторого C_0-множества имеет место оценка*

$$BV(|z|)<\ln|f(z)|, \quad где \quad B>-\infty,$$

то $A_\Lambda>-\infty$.

Это замечание верно в случае любого нецелого порядка.

2. Доказательство теоремы 1. Сначала приведем предложенное А. А. Гольдбергом доказательство существования конечного или равного $-\infty$ предела $\lim\limits_{\varphi\to 0} h(\varphi)$. Обозначим $h(\varphi)=h(\varphi;f)$. Тогда $-h(\varphi;f)=$ $=H\left(\varphi;\frac{1}{f}\right)$, где $H\left(\varphi;\frac{1}{f}\right)$ — индикатор функции $\frac{1}{f(z)}$, аналитической в области $\{0<\arg z<2\pi\}$, тригонометрически выпуклый в открытом интервале $(0, 2\pi)$ (см. [1, лемма 6]). Пусть $0<\varphi_1<\varphi_2<\varphi_3<\frac{\pi}{\rho}$. Тогда

$$h(\varphi_2)\sin\rho(\varphi_3-\varphi_1)\geqslant h(\varphi_1)\sin\rho(\varphi_3-\varphi_2)+h(\varphi_3)\sin\rho(\varphi_2-\varphi_1).$$

Устремив φ_1 к нулю и перейдя к верхнему пределу, получим

$$h(\varphi_2)\sin\rho\varphi_3\geqslant\varlimsup_{\varphi\to 0+} h(\varphi)\sin\rho(\varphi_3-\varphi_2)+h(\varphi_3)\sin\rho\varphi_2.$$

Затем устремим φ_2 к нулю и перейдем к нижнему пределу. Имеем

$$\varliminf_{\varphi\to 0+} h(\varphi)\sin\rho\varphi_3\geqslant\varlimsup_{\varphi\to 0+} h(\varphi)\sin\rho\varphi_3.$$

Следовательно, существует конечный или равный $-\infty$ предел $\lim\limits_{\varphi\to 0+} h(\varphi)$. Так как $h(\varphi)$ — четная функция, то существует и $\lim\limits_{\varphi\to 0} h(\varphi)$.

Перейдем теперь к доказательству формулы (2). Не уменьшая общности, можем считать [8], что функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_k}, p\right),$$

где $E(u, p)$ — первичный множитель Вейерштрасса рода $p = [\rho]$. Тогда

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left|E\left(\frac{z}{a_k}, p\right)\right| = \int_0^{\infty} \ln\left|E\left(\frac{re^{i\varphi}}{t}, p\right)\right| \times$$

$$\times dn(t) = \int_0^{\infty} \frac{n(r\tau)(\cos p\varphi - \tau\cos(p+1)\varphi)}{\tau^{p+1}(1 - 2\tau\cos\varphi + \tau^2)} d\tau =$$

$$= \cos p\varphi \int_0^{\infty} \frac{n(r\tau)}{\tau^{p+1}} \frac{1 - \tau\cos\varphi}{1 - 2\tau\cos\varphi + \tau^2} d\tau + \sin p\varphi \sin\varphi \int_0^{\infty} \frac{n(r\tau)}{\tau^{p}} \times$$

$$\times \frac{d\tau}{1 - 2\tau\cos\varphi + \tau^2}.$$

Запишем

$$\int_0^{\infty} \frac{n(r\tau)}{\tau^{p+1}} \frac{\tau - \cos\varphi}{1 - 2\tau\cos\varphi + \tau^2} d\tau = \int_0^1 + \int_1^{\infty}.$$

Заменив переменную τ в последнем интеграле на $\frac{1}{t}$, получим

$$\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{V(r)} = \frac{\cos p\varphi}{V(r)} \int_0^1 \left\{\frac{n(rt)}{t^{p+1}} \frac{1 - t\cos\varphi}{1 - 2t\cos\varphi + t^2} + \right.$$

$$\left. + t^p n\left(\frac{r}{t}\right) \frac{t - \cos\varphi}{1 - 2t\cos\varphi + t^2}\right\} dt + \frac{\sin p\varphi \sin\varphi}{V(r)} \int_0^{\infty} \frac{n(rt)}{t^p} \times$$

$$\times \frac{dt}{1 - 2t\cos\varphi + t^2} = \cos p\varphi \sum_{\nu=0}^{3} I_\nu + I_4, \tag{5}$$

где $(0 < \xi < 1)$

$$I_0 = \frac{1}{V(r)} \int_0^{\xi} \frac{t^{-p-1} n(rt) - t^p n\left(\frac{r}{t}\right)}{1 - t} dt, \quad I_1 = \frac{1}{V(r)} \int_{\xi}^{1} t^{-p-1} n(rt)\, dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{V(r)} \int_{\xi}^{1} \left\{t^p n\left(\frac{r}{t}\right) - \frac{n(rt)}{t^p}\right\} \frac{t - \cos\varphi}{1 - 2t\cos\varphi + t^2} dt,$$

$$I_3 = \frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{V(r)} \int_0^{\xi} \frac{t^p n\left(\frac{r}{t}\right) - t^{-p} n(rt)}{1 - t} \frac{1 + t}{1 - 2t\cos\varphi + t^2} dt,$$

$$I_4 = \frac{\sin p\varphi \sin\varphi}{V(r)} \int_0^{\infty} \frac{n(rt)}{t^p} \frac{dt}{1 - 2t\cos\varphi + t^2}.$$

Оценим интегралы I_ν при $\varphi \to 0$ и $\xi = \xi(\varphi) \to 1$, учитывая (1). Пусть $0 < \varphi < \frac{\pi}{6(p+1)}$, $0 < \xi < \frac{1}{2}$.

Как заметил А. А. Гольдберг [8, стр. 171], не уменьшая общности, можно считать, что для всех $0 < r < \infty$ выполняется

$$\frac{V(rt)}{V(r)} \leqslant \begin{cases} t^{\rho+\sigma} & \text{при } 1 \leqslant t < \infty, \\ t^{\rho-\sigma} & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{6}$$

где $0 < \sigma < \min(\rho - p,\ p + 1 - \rho)$, $p = [\rho]$.

Отсюда и из (1) получаем

$$|I_1| \leqslant \Delta \int_{\xi}^{1} \frac{V(rt)}{V(r)} \frac{dt}{t^{p+1}} \leqslant \Delta \int_{\xi}^{1} t^{\rho-p-1-\sigma} dt \leqslant M_1 (1 - \xi) = \varepsilon_1(\xi),$$

где M_1 — некоторая постоянная и, следовательно, $\varepsilon_1(\xi) \to 0$ при $\xi \to 1$.

Далее, из (1) и (6) находим

$$|I_4| \leqslant \sin p\varphi \sin \varphi \Delta \left\{ \int_0^1 t^{\rho-\sigma-p} \frac{dt}{1 - 2t\cos\varphi + t^2} + \right.$$

$$\left. + \int_1^\infty t^{\rho+\sigma-p} \frac{dt}{1 - 2t\cos\varphi + t^2} \right\} \leqslant \sin p\varphi \sin \varphi \Delta \left\{ \int_0^\infty t^{\rho-\sigma-p} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{dt}{1 - 2t\cos\varphi + t^2} + \int_0^\infty t^{\rho+\sigma-p} \frac{dt}{1 - 2t\cos\varphi + t^2} \right\}.$$

Вычисляя последние два интеграла, имеем

$$|I_4| \leqslant M_4 \sin(p + 1)\varphi = \varepsilon_4(\varphi),$$

где $M_4 = \text{const}$, $\varepsilon_4(\varphi) \to 0$ при $\varphi \to 0$.

Интегралы I_2 и I_3 запишем в виде

$$I_2 = J_2 + \widetilde{J}_2, \quad I_3 = J_3 + \widetilde{J}_3,$$

где

$$J_2 = \frac{1}{V(r)} \int_{\xi}^{1} \frac{t^p \left[n\left(\frac{r}{t}\right) - n(rt) \right] (t - \cos\varphi)}{1 - 2t\cos\varphi + t^2} dt,$$

$$\widetilde{J}_2 = \frac{1}{V(r)} \int_{\xi}^{1} \frac{n(rt)}{t^p} \frac{(t^{2p} - 1)(t - \cos\varphi)}{1 - 2t\cos\varphi + t^2} dt$$

и

$$J_3 = \frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{V(r)} \int_0^{\xi} \frac{t^p \left[n\left(\frac{r}{t}\right) - n(rt) \right]}{1 - t} \frac{1 + t}{1 - 2t\cos\varphi + t^2} dt,$$

$$\widetilde{J}_3 = \frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{V(r)} \int_0^{\xi} \frac{n(rt)}{t^p} \frac{(t^{2p} - 1)(1 + t)}{1 - 2t\cos\varphi + t^2} dt.$$

Так как $\left| \frac{(1 - t)(t - \cos\varphi)}{1 - 2t\cos\varphi + t^2} \right| \leqslant 1$, то учитывая (1) и (6), получаем $\widetilde{J}_2 \leqslant M_2 (1 - \xi) = \varepsilon_2(\xi)$, где $M_2 = \text{const}$, $\varepsilon_2(\xi) \to 0$ при $\xi \to 1$.

Для $\widetilde{J}_3$ имеем оценку

$$|\widetilde{J}_3| \leqslant \Delta\, 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\int\limits_0^{\xi} t^{\varrho-p-\sigma}\,\frac{(1+t+\ldots+t^{2p-1})(1+t)}{1-2t\cos\varphi+t^2}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \Delta 8p\sin^2\frac{\varphi}{2}\int\limits_0^1\frac{dt}{1-2t\cos\varphi+t^2} = \frac{\Delta 8p\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}{\sin\varphi}\times$$

$$\times\operatorname{arctg}\frac{t-\cos\varphi}{\sin\varphi}\Bigg|_{t=0}^{t=1} \leqslant M_3\sin\varphi = \varepsilon_3(\varphi),$$

где $M_3=\mathrm{const}$, $\varepsilon_3(\varphi)\to 0$ при $\varphi\to 0$.

Если взять $\xi=\cos\varphi$ и учесть свойства функций ε_i, а также неравенства $J_2>0$, $J_3>0$, то из (5) получим

$$\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{V(r)} \geqslant \cos p\varphi I_0 + o(\varphi),\quad \varphi\to 0. \tag{7}$$

Переходя в этом неравенстве сначала к нижнему пределу, когда $r\to\infty$, а потом к верхнему пределу, когда $\varphi\to 0$, находим

$$\lim_{\varphi\to 0} h(\varphi) \geqslant \varlimsup_{\varphi\to 0}\varliminf_{r\to\infty}\frac{1}{V(r)}\int\limits_0^{\cos\varphi}\frac{t^{-p-1}n(rt)-t^p n\left(\dfrac{r}{t}\right)}{1-t}\,dt. \tag{8}$$

Пусть теперь $\xi=1-\sqrt{\varphi}$. Так как $\dfrac{t-\cos\varphi}{1-2t\cos\varphi+t^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$, то из (1) и (6) можно получить

$$J_2 \leqslant \frac{1}{V(r)}\int\limits_{\xi}^{1} t^p\left[n\left(\frac{r}{t}\right)-n(rt)\right]dt \leqslant M_5(1-\xi)=\varepsilon_5(\xi),$$

$M_5=\mathrm{const}$, $\varepsilon_5(\xi)\to 0$ при $\xi\to 1$.

Далее

$$|J_3| \leqslant \frac{4\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}{V(r)}\int\limits_0^{1-\sqrt{\varphi}}\frac{t^p\left[n\left(\dfrac{r}{t}\right)-n(rt)\right]}{(1-t)^3}\,dt \leqslant M_6\frac{\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}{\varphi^{\frac{3}{2}}}=\varepsilon_6(\varphi),$$

$M_6=\mathrm{const}$, $\varepsilon_6(\varphi)\to 0$ при $\varphi\to 0$. Следовательно,

$$\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{V(r)} \leqslant \cos p\varphi I_0 + o(\varphi),\ \ \varphi\to 0. \tag{9}$$

Отсюда

$$\lim_{\varphi\to 0} h(\varphi) \leqslant \varliminf_{\varphi\to 0}\varliminf_{r\to\infty}\frac{1}{V(r)}\int\limits_0^{1-\sqrt{\varphi}}\frac{t^{-p-1}n(rt)-t^p n\left(\dfrac{r}{t}\right)}{1-t}\,dt. \tag{10}$$

Неравенства (8) и (10) дают (2). Тем самым доказательство теоремы 1 закончено.

Замечание 2. Если в неравенствах (7) и (9) переходить к верхнему пределу при $r \to \infty$, то для индикатора $H(\varphi)$ функции $f(z)$ получим

$$H(0) = \lim_{\xi \to 1-0} \varlimsup_{r \to \infty} \frac{1}{V(r)} \int\limits_0^{\xi} \frac{t^{-\rho-1} n(rt) - t^{\rho} n\left(\frac{r}{t}\right)}{1-t} dt.$$

Эта формула является обобщением одного результата П. Коозиса [9, стр. 128].

Авторы признательны А. А. Гольдбергу за ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956.
2. A. Bailette, Sur la co-indicatrice des produits canoniques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 17, 1, 1967, 109—118.
3. А. А. Кондратюк, А. Н. Фридман, О нижнем индикаторе целой функции нулевого рода с положительными нулями, УМЖ, т. 24, № 1, 1972.
4. И. Ф. Красичков, Оценки снизу для целых функций конечного порядка, Сиб. матем. ж., т. VI, № 4, 1964.
5. А. А. Гольдберг, Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. III, Матем. сб., т. 65 (107), 1964.
6. В. С. Азарин, О лучах вполне регулярного роста целой функции, Матем. сб., т. 79 (121), 1969.
7. А. А. Кондратюк, Целые функции с конечной максимальной плотностью нулей. I, сб. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 10, Изд-во ХГУ, Харьков, 1970.
8. А. А. Гольдберг, Экстремальный индикатор для целой функции с положительными нулями, Сиб. матем. ж., т. III, № 2, 1962.
9. P. Koosis, Sur la non-totalité de certaines suites d'exponentielles sur des intervales assez longs, Ann. d'Ecole Normale Supérieure, 75(3), 1958, 125—152.

Поступила 20.XII 1970 г.
Львовский государственный университет