УДК 517.949.2

Периодические решения дискретных разностных уравнений второго порядка

Ю. А. Митропольский, Н. А. Михайловская

Вопросы существования периодических решений линейных систем разностных уравнений изучались в работе [1]. Полученные там результаты в основном посвящены установлению существования периодических решений. Что же касается алгоритмов нахождения периодических решений линейных систем разностных уравнений, то авторам не известны работы, посвященные этому вопросу. В данной статье на основании идеи работы [2], приводится алгоритм отыскания периодического решения линейного разностного уравнения второго порядка и доказывается теорема существования такого решения.

Рассмотрим разностное уравнение

$$\Delta^2 x_n = f_n(x_n, \Delta x_n), \tag{1}$$

где $f_n(x_n, \Delta x_n)$ — периодическая по n с периодом N функция, определенная в области

$$-\infty < n < \infty, \qquad a \leqslant x_n \leqslant b, \qquad c \leqslant \Delta x_n \leqslant d, \tag{2}$$

непрерывная по совокупности переменных x_n, Δx_n и удовлетворяющая неравенствам

$$|f_n(x, y)| \leqslant M, \qquad |f_n(x', y') - f_n(x'', y'')| \leqslant k_1 |x' - x''| + k_2 |y' - y''|. \tag{3}$$

Предположим, что постоянные a, b, c, d, M, k_1, k_2 удовлетворяют неравенствам:

1) $b - a \geqslant \dfrac{MN^2}{4}, \quad c \leqslant -\dfrac{5MN}{6} \leqslant \dfrac{5MN}{6} \leqslant d;$

2) $\dfrac{N^2}{4} k_1 + \dfrac{5N}{6} k_2 < 1.$

В дальнейшем, при построении алгоритма отыскания периодического решения важную роль будет играть следующая лемма.

Лемма. *Пусть $n \in [0, N-1]$. Тогда для функции f_n имеет место неравенство*

$$\left| \sum_{j=0}^{n-1} (f_j - \overline{f}_n) \right| \leqslant 2n \left(1 - \frac{n}{N}\right) |f_n|_0, \tag{4}$$

где через $\overline{f}_n$ обозначено среднее

$$\overline{f}_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j, \qquad |f_n|_0 = \max_n |f_n|.$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{j=0}^{n-1}[f_j-\bar f_n]=\left(1-\frac{n}{N}\right)\sum_{j=0}^{n-1}f_j-\frac{n}{N}\sum_{j=n}^{N-1}f_j.$$

Отсюда

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1}(f_j-\bar f_n)\right|\leqslant\left(1-\frac{n}{N}\right)\sum_{j=0}^{n-1}|f_j|+\frac{n}{N}\sum_{j=n}^{N-1}|f_j|\leqslant$$

$$\leqslant n\left(1-\frac{n}{N}\right)|f_n|_0+\frac{n}{N}(N-n)|f_n|_0\leqslant\alpha_n|f_n|_0,$$

где $\alpha_n=2n\left(1-\dfrac{n}{N}\right)$, что и доказывает утверждение.

Обозначим через

$$Lf_i=\sum_{j=0}^{i-1}\left[f_j-\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}f_j\right],$$

$$L^2f_j=\sum_{k=0}^{i-1}\left\{\sum_{j=0}^{k}\left[f_j-\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}f_j\right]-\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{j=0}^{k}\left[f_j-\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}f_j\right]\right]\right\}.$$

Вполне очевидно, что для оператора L в силу леммы верна оценка

$$|Lf_i|\leqslant\alpha_i|f_i|_0. \tag{5}$$

Предположим, что уравнение (1) имеет периодическое периода N решение и известна точка x_0, через которую это решение проходит при значении $n=0$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть x_n — периодическое с периодом N решение уравнения* (1), *проходящее через точку* x_0

$$a+\frac{MN^2}{4}\leqslant x_0\leqslant b-\frac{MN^2}{4}. \tag{6}$$

Тогда

$$x_n=\lim_{l\to\infty}x_n^{(l)}(x_0) \tag{7}$$

равномерно относительно n, x_0, *где* $x_n^{(l)}(x_0)$ — *последовательность периодических функций, определяемая соотношениями*

$$\begin{aligned}&x_n^{(0)}(x_0)=x_0,\\&x_n^{(l+1)}(x_0)=x_0+L^2f_n(x_n^{(l)}(x_0),\ \Delta(x_n^{(l)}(x_0)))\qquad(l=0,1,2,\ldots).\end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство. При $l=0$ из соотношения (8) и оценки (5) получаем

$$|x_n^{(1)}(x_0)-x_0|\leqslant\alpha_n|Lf_n(x_n^{(0)}(x_0),\quad\Delta(x_n^{(0)}(x_0)))|_0\leqslant\alpha_nM\frac{N}{2}\leqslant M\frac{N^2}{4}. \tag{9}$$

Взяв при $l=0$ первую разность соотношений (8), получаем

$$\Delta x_n^{(1)}(x_0)=Lf_n(x_n^{(0)}(x_0),0)-L\overline{f_n(x_n^{(0)}(x_0),0)},$$

откуда следует оценка

$$|\Delta x_n^{(1)}(x_0)| \leqslant \alpha_n M + \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k M \leqslant \left(\alpha_n + \frac{N}{3}\right) M \leqslant \frac{5MN}{6}. \tag{10}$$

Из неравенств (9), (10) в силу условий 1) следует, что

$$a \leqslant x_n^{(1)}(x_0) \leqslant b, \qquad c \leqslant \Delta x_n^{(1)}(x_0) \leqslant d. \tag{11}$$

По индукции легко доказать, что функции последовательности (8) удовлетворяют неравенствам (11) при всех $l = 0, 1, \ldots, n \in (-\infty, \infty)$. Докажем сходимость последовательности (8). С этой целью оценим при $0 \leqslant n \leqslant N - 1$ разности

$$|x_n^{(2)}(x_0) - x_n^{(1)}(x_0)| \leqslant |L^2 [f_n(x_n^{(1)}(x_0), \Delta(x_n^{(1)}(x_0))) -$$
$$- f_n(x_n^{(0)}(x_0), 0)]| \leqslant \alpha_n \frac{N}{2}[k_1 |x_n^{(1)}(x_0) - x_n^{(0)}(x_0)| + k_2 |\Delta(x_n^{(1)}(x_0))|], \tag{12}$$

$$|\Delta(x_n^{(2)}(x_0)) - \Delta(x_n^{(1)}(x_0))| \leqslant \left(\alpha_n + \frac{N}{3}\right)[k_1 |x_n^{(1)}(x_0) -$$
$$- x_n^{(0)}(x_0)| + k_2 |\Delta(x_n^{(1)}(x_0))|]. \tag{13}$$

С учетом (9), (10) неравенства (12), (13) представим в виде

$$|x_n^{(2)}(x_0) - x_n^{(1)}(x_0)| \leqslant \frac{MN^2}{4}\left(k_1 \frac{N^2}{4} + k_2 \frac{5N}{6}\right), \tag{14}$$

$$|\Delta x_n^{(2)}(x_0) - \Delta x_n^{(1)}(x_0)| \leqslant \frac{5MN}{6}\left(k_1 \frac{N^2}{4} + k_2 \frac{5N}{6}\right). \tag{15}$$

Вообще, методом математической индукции легко доказать, что для любых $l = 0, 1, 2, \ldots$ и $0 \leqslant n \leqslant N - 1$ имеют место оценки

$$|x_n^{(l+1)}(x_0) - x_n^{(l)}(x_0)| \leqslant \frac{MN^2}{4}\left(k_1 \frac{N^2}{4} + k_2 \frac{5N}{6}\right)^l, \tag{16}$$

$$|\Delta x_n^{(l+1)}(x_0) - \Delta x_n^{(l)}(x_0)| \leqslant \frac{5MN}{6}\left(k_1 \frac{N^2}{4} + k_2 \frac{5N}{6}\right)^l. \tag{17}$$

Так как $x_n^{(l)}(x_0)$ — периодические функции, то неравенства (16), (17) имеют место для всех $-\infty < n < \infty$ и $l = 0, 1, 2, \ldots$ Из этих неравенств и условий 2) следует равномерная сходимость последовательностей $x_n^{(l)}(x_0)$, $\Delta x_n^{(l)}(x_0)$ к предельным функциям $x_n^{(\infty)}(x_0)$, $\Delta x_n^{(\infty)}(x_0)$. Эти предельные функции периодические по n с периодом N и удовлетворяют уравнению

$$x_n^{(\infty)}(x_0) = x_0 + L^2 f_n(x_n^{(\infty)}(x_0), \Delta x_n^{(\infty)}(x_0)). \tag{18}$$

Так как x_n — периодическое решение уравнения (1), то оно является также решением уравнения (18). Поэтому, чтобы доказать соотношение (7), необходимо доказать, что уравнение (18) имеет единственное периодическое решение. Это легко доказать методом от противного.

Рассмотрим теперь вопрос существования периодических решений уравнения (1). Положим

$$S(x_0) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l(x_n^{(\infty)}(x_0), \Delta x_n^{(\infty)}(x_0)), \tag{19}$$

где $x_n^{\infty}(x_0)$ — предельная функция последовательности (8). Вполне очевидно, что при $S(x_0) = 0$ уравнение (18) переходит в уравнение (1), и вопрос существования периодических решений уравнения (1) решается существованием нулей функции $S(x_0)$. Таким образом, каждому нулю функции $S(x_0)$ соответствует единственное периодическое периода N решение уравнения (1) и количество периодических решений уравнения (1) определяется, следовательно. количеством нулей функции $S(x_0)$.

Чтобы решить вопрос о существовании нулей функции $S(x_0)$, рассмотрим

$$S^{(l)}(x) = S(x_n^{(l)}(x_0)) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_n^{(l)}(x_0), \Delta x_n^{(l)}(x_0)), \tag{20}$$

где $x_n^{(l)}(x_0)$ — функции (8).

Из неравенств (16), (17) следует оценка

$$\begin{gathered}|S(x_n^{(l)}(x_0)) - S(x_n^{(\infty)}(x_0))| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} |f_i(x_n^{(l)}(x_0),\ \Delta x_n^{(l)}(x_0)) - f_i(x_n^{(\infty)}(x_0),\ \Delta x_n^{(\infty)}(x_0))| \leqslant \\ \leqslant k_1 |x_n^{(l)}(x_0) - x_n^{(\infty)}(x_0)|_0 + k_2 |\Delta x_n^{(l)}(x_0) - \Delta x_n^{(\infty)}(x_0)|_0 \leqslant \\ \leqslant \frac{M\left(k_1\dfrac{N^2}{4} + k_2\dfrac{5N}{6}\right)^{l+1}}{1 - k_1\dfrac{N^2}{4} - k_2\dfrac{5N}{6}} = d_l.\end{gathered} \tag{21}$$

Учитывая непрерывность функции $S^{(l)}(x) = S(x_n^{(l)}(x_0))$ и оценку (21) можно доказать утверждение, определяющее условия существования периодических решений уравнения (1).

Т е о р е м а 2. *Пусть правая часть уравнения* (1) *удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Предположим, что для некоторого l функция* (20) *удовлетворяет неравенствам*

$$\min_{a+\frac{MN^2}{4}\leqslant x\leqslant b-\frac{MN^2}{4}} S(x_n^{(l)}(x_0)) \leqslant -d_l, \qquad \max_{a+\frac{MN^2}{4}\leqslant x\leqslant b-\frac{MN^2}{4}} S(x_n^{(l)}(x_0)) \geqslant d_l, \tag{22}$$

где d_l — постоянная (21).

Тогда уравнение (1) *имеет периодическое периода N решение $x = x_n$, для которого*

$$a + \frac{MN^2}{4} \leqslant x_0 \leqslant b - \frac{MN^2}{4}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x^1, x^2 — точки отрезка $\left[a + \frac{MN^2}{4},\ b - \frac{MN^2}{4}\right]$, такие, что

$$S(x^1) = \inf_{a+\frac{MN^2}{4}\leqslant x\leqslant b-\frac{MN^2}{4}} S^{(l)}(x), \qquad S(x^2) = \sup_{a+\frac{MN^2}{4}\leqslant x\leqslant b-\frac{MN^2}{4}} S^{(l)}(x). \tag{23}$$

Тогда с учетом неравенств (21), (22) получаем

$$\begin{gathered}S(x^1) = S^{(l)}(x^1) + [S(x^1) - S^{(l)}(x^1)] \leqslant 0, \\ S(x^2) = S^{(l)}(x^2) + [S(x^2) - s^{(l)}(x^2)] \geqslant 0.\end{gathered} \tag{24}$$

Из непрерывности $S(x)$ и неравенств (24) следует существование точки $x_0 \in [x^1, x^2]$ такой, что $\Delta(x_0) = 0$, т. е. уравнение (1) имеет периодическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Халанай, Д. Векслер, Качественная теория импульсных систем, «Мир», М., 1971.
2. А. М. Самойленко, О периодических решениях нелинейных уравнений второго порядка, Дифференциальные уравнения, т. 3, № 11, 1967.

Поступила 10.III 1972 г.,
Институт математики АН УССР,
Киевский государственный университет