УДК 517.5

О полном разложении степени приближения для фейеровских средних

Э. Л. Штарк

Пусть $f(x)$ — непрерывная 2π-периодическая функция, т. е. $f \in C_{2\pi}$, с нормой $\|f(x)\| = \max\limits_{-\pi \leqslant x \leqslant \pi} |f(x)|$; пусть, далее,

$$\mathrm{Lip}_1\,\alpha = \{f \in C_{2\pi};\ |f(x+h) - f(x)| \leqslant |h|^{\alpha}\}. \tag{1}$$

Для сингулярного интеграла Фейера

$$\sigma_n(f;\,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,F_{n-1}(t)\,dt \tag{2}$$

с положительным ядром (в замкнутой форме)

$$F_{n-1}(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin n\,\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}\right)^2 \tag{3}$$

степень приближения относительно класса Липшица (1) С. М. Никольским [1] определена следующим образом:

$$\Delta(\alpha;\,n) = \sup_{f \in \mathrm{Lip}_1 \alpha} \|f(x) - \sigma_n(f;\,x)\|. \tag{4}$$

Для оценки этой величины служит соотношение [1]

$$\Delta(\alpha;\,n) = \frac{2}{\pi} M(\alpha;\,n) \tag{5}$$

с (алгебраическим) моментом порядка α:

$$M(\alpha;\,n) \equiv \int\limits_0^{\pi} t^{\alpha} F_{n-1}(t)\,dt. \tag{6}$$

С. А. Теляковский, используя представление (3), указал для соотношения (5) полное асимптотическое разложение [2]. В случае $\alpha = 1$ имеем

$$\Delta(1;\,n) \simeq \frac{2}{\pi}\,\frac{\log n}{n} + \frac{2}{\pi}(1 + \gamma + \log 2)\,\frac{1}{n} + \\ + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m-1}{2m}\{1 + (-1)^n(1 - 2^{2m})\}\,B_{2m}\,\frac{1}{n^{2m+1}}, \quad (n \to \infty), \tag{7}$$

при этом γ означает постоянную Эйлера и $B_{2m} = (-1)^{m+1} 2\,\dfrac{(2m)!}{(2\pi)^{2m}} \sum\limits_{s=1}^{\infty} \dfrac{1}{s^{2m}}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ — числа Бернулли [3, стр. 403].

Следует заметить, что разложение (7) можно рассматривать как подлинно асимптотическое разложение сверх члена порядка $O(n^{-1})$ смотря по обстоятельствам отдельно для четных и нечетных значений параметра n [ср. (16)].

Доказательство соотношения (7) в [2] можно провести иначе, используя при этом известные разложения (см. (11), (12)), и отчасти значительно упростить, если вместо (3) привлечь представление ядра Фейера в виде полинома порядка $(n-1)$:

$$F_{n-1}(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\cos kt. \tag{3'}$$

Отсюда для момента (6) при $\alpha=1$ непосредственно имеем (ср. [4, 5]):

$$M(1;n)=\left\{\frac{\pi^2}{12}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\right\}+\left\{\frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{1}{k^2}\right\}=$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^2}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-(-1)^k}{k}=$$

$$=\begin{cases}2\left[\sum\limits_{k=\frac{n}{2}}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}+\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{\frac{n}{2}}\dfrac{1}{(2k-1)}\right] & (n\text{ — четное}) \quad (8)\\ 2\left[\sum\limits_{k=\frac{n-1}{2}}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}+\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{1}{(2k-1)}\right] & (n\text{ — нечетное}) \quad (9)\end{cases}=$$

$$=2\left\{\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\frac{1}{(2k-1)}\right\}, \tag{10}$$

где $\left[\frac{n}{2}\right]$ — наибольшее целое число.

Проблема установления полного асимптотического разложения для $\Delta(1;n)$ сводится, таким образом, к проблеме нахождения соответствующих разложений для отрезков ряда, появляющихся в соотношении (10).

Из известных разложений (см., например, [6, стр, 324] и др.)

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\simeq\log n+\gamma-\frac{1}{n}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}}{2m}\frac{1}{n^{2m}}, \tag{11}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}\simeq\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\sum_{m=1}^{\infty}B_{2m}\frac{1}{n^{2m+1}} \tag{12}$$

путем элементарных преобразований получаем:

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{2j-1}\simeq\frac{1}{2}\log p+\log 2+\frac{1}{2}\gamma+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}}{2m}(2^{2m-1}-1)\frac{1}{(2p)^{2m}}, \tag{13}$$

$$\sum_{j=p}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}\simeq\frac{1}{4p}-\sum_{m=1}^{\infty}B_{2m}(2^{2m-1}-1)\frac{1}{(2p)^{2m+1}}. \tag{14}$$

Из соотношений (13) и (14) при $p=\frac{n}{2}$ для выражения (8) сразу же получаем:

$$M(1;\,n)\simeq\frac{\log n}{n}+(1+\gamma+\log 2)\frac{1}{n}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{m}\,(2^{2m-1}-1)\,B_{2m}\,\frac{1}{n^{2m+1}}.$$

Этим завершено доказательство (7) для четных n.

Разложения (13), (14) для нечетных n сначала дают

$$M(1;\,n)\simeq\frac{1}{n-1}-2\sum_{m=1}^{\infty}B_{2m}\,(2^{2m-1}-1)\,\frac{1}{(n-1)^{2m+1}}+\frac{1}{n}\log(n-1)+$$
$$+\log 2+\gamma+\sum_{m=1}^{\infty}B_{2m}\,(2^{2m-1}-1)\,\frac{1}{m}\,\frac{1}{(n-1)^{2m}},$$

где $$\frac{1}{n-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k}},\quad \log(n-1)=\log n-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kn^{k}}\quad(n>1),$$

и дальше

$$M(1;\,n)\simeq\frac{\log n}{n}+(1+\gamma+\log 2)\frac{1}{n}+\sum_{m=3}^{\infty}\frac{m-2}{m-1}\,\frac{1}{n^{m}}-$$
$$-\sum_{m=1}^{\infty}B_{2m}\,(2^{2m-1}-1)\,\frac{1}{m}\left(2m-1+\frac{1}{mn}\right)\frac{1}{(n-1)^{2m+1}}\quad(n=3,5,7,\ldots).$$

Чтобы свести это разложение к случаю (7), привлекаются разложения

$$\frac{1}{(n-1)^{2j+1}}=\sum_{k=2j+1}^{\infty}\binom{k-1}{2j}\frac{1}{n^{k}}\quad(j=1,2,3,\ldots);$$

отсюда при одновременном расщеплении на четные и нечетные степени n^{-1} следует

$$M(1;n)\simeq\frac{\log n}{n}+(1+\gamma+\log 2)\frac{1}{n}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m}{2m+1}\left\{1-\sum_{k=1}^{m}B_{2k}\,(2^{2k}-2)\,\times\right.$$
$$\left.\times\binom{2m+1}{2k}\right\}\frac{1}{n^{2m+2}}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{m}\left\{\frac{1}{2}-B_{2m}\,(2^{2m-1}-1)-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{m-1}B_{2k}\,(2^{2k-1}-1)\binom{2m}{2k}\right\}\frac{1}{n^{2m+1}}\simeq\frac{\log n}{n}+(1+\gamma+\log 2)\,\frac{1}{n}+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{m}\,B_{2m}2^{2m-1}\,\frac{1}{n^{2m+1}}\quad(n=3,5,7,\ldots),\tag{15}$$

поскольку выражение в первой фигурной скобке обращается в нуль при каждом $m=1,2,3,\ldots$, во второй — сводится к $B_{2m}2^{2m-1}$.

В первом случае это следует, например, из того, что

$$2\sum_{k=1}^{m}\binom{2m+1}{2k}B_{2k}=2m-1\quad [7,\text{ стр. } 151\,(3);\ 8,\text{ стр. } 108],$$

$$\sum_{k=1}^{m} 2^{2k}\binom{2m+1}{2k} B_{2k} = 2m \quad [7, стр. 154 (25), 171 (1); 8, стр. 123],$$

во втором — из того, что

$$\sum_{k=1}^{m-1} \binom{2m}{2k} B_{2k} = m-1 \quad [7, стр. 152 (10); 8, стр. 108, 112]$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} 2^{2k}\binom{2m}{2k} B_{2k} = (2m-1) - 2(2^{2m}-1) B_{2m} \quad [7, стр. 154 (24)].$$

Разложение (15) при нечетных n идентично разложению (7). Начало разложения (7), именно

$$\Delta(1; n) = \frac{2}{\pi}\frac{\log n}{n} + \frac{2}{\pi}(1+\gamma+\log 2)\frac{1}{n} + R_n, \quad R_n = O(n^{-3}) \ (n\to\infty), \tag{16}$$

было дано Э. Л. Штарком [5; стр. 158] как важное асимптотическое разложение этой степени приближения; при этом константа, содержащаяся в остаточном члене R_n, принимает различные значения в зависимости от того, является ли n четным или нечетным. По этому кругу вопросов отсылаем к работе П. Л. Бутцера — Э. Л. Штарка [4], где такого рода разложения, рассматривались при полиномиальных методах приближения. Наконец, отметим, что можно получить совершенно иные результаты, если вместо (3) [соответственно (3')] исходить из $F_n(t)$, т. е. из ядра, являющегося полиномом порядка n; соответствующее этому случаю важное разложение можно найти в [4, стр. 227]. Представление $\Delta(1; n)$, подобное (10) для $F_n(t)$, применялось уже Б. С.-Надем [9, стр. 72, 78/124, 131] для вычисления наилучшей асимптотической константы или константы Никольского, т. е. $\frac{2}{\pi}$ в первом члене (16) и для оценки второй константы. Многочисленные литературные ссылки относительно этих первых двух констант можно найти в [4, 5] (ср. также [10]).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский, Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 4, № 4—5, 1940.
2. С. А. Теляковский, Приближение суммами Фейера функций, удовлетворяющих условию Липшица, УМЖ., т. 21, № 3, 1969.
3. I. M. Ryshik, I. S. Gradstein, Summer-, Product- and Integraltafeln, Berlin, 1963, XXIII + 438 pp.
4. P. L. Butzer, E. L. Stark, Wesentliche acymptotische Entwicklungen für Approximationsmaβe trigonometrischer singulärer Integrale, Math. Nachr., 39, 1969, 223—237.
5. E. L. Stark, Über die Approximationsmaβe spezieller singulärer Integrale, Computing, 4, 1969, 153—159.
6. T. J. I'A. Bromwich, An Intromuction to the Theory of Infinite Series, London, 1965, XIV + 542 pp.
7. N. Nielsen, Traité Elémentaire des Nombres de Bernoulli, Paris, 1923, X + 398 pp.
8. J. Riordan, Combinatorial Ibentities, New York, 1968, XII + 256 pp.
9. B. Sz.-Nagy, Approximation der Funktionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihen. Acta Sci. Math. (Sreged), 11, 1946, 71—84; Hung. Orig.: Mathematikai és Fizikai Lapok, 49, 1942, 123—138.
10. P. L. Butzez, R. J. Nessel, Fourier Analysis and Approzimation. Vol. 1, One-dimensional Theory Basel — New York, 1971, XVII + 555 pp.

Поступила 19.IX 1971 г.