УДК 517.946.9

Об одной краевой задаче для системы эллиптических дифференциальных уравнений

Л. Д. Гординский

Пусть Ω — ограниченное замкнутое множество в пространстве E_n с достаточно гладкой границей l; A — самосопряженная линейная эллиптическая дифференциальная $N \times N$ матрица порядка $2m$ дивергентного типа

$A = \mathrm{Div}_A \cdot \mathrm{Grad}_A$, для которой справедлива формула Грина

$$\int_\Omega (v(x), Au(x))\, dx + \int_\Omega (\mathrm{Grad}_A v(x), \mathrm{Grad}_A u(x))\, dx = -\oint_l (\Gamma v(x'), Tu(x'))\, dl_{x'}, \tag{1}$$

где $x \in \Omega$, $x' \in l$; $u(x)$, $v(x)$ — вектор-функции, обладающие всеми необходимыми производными в области Ω и на ее границе l. Формула (1) является аналогом формулы Грина для оператора Лапласа $\Delta = \mathrm{div} \cdot \mathrm{grad}$. Возникающие в (1) дифференциальные операторы Γ и T будем называть соответственно операторами краевых условий типа Дирихле и Неймана.

Рассмотрим нелинейную краевую задачу

$$\begin{gathered} Au(x) = \lambda \{F[x, u(x)] + f(x)\})\ x \in \Omega, \\ Bu(x') = \lambda \{\Psi[x', u(x')] + \varphi(x')\},\ x' \in l, \end{gathered} \tag{2}$$

где $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_N(x))$; $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x))$; $\varphi(x') = (\varphi_1(x'), \ldots$ $\ldots, \varphi_m(x'))$; A — описанный выше оператор; $B = T + \sigma\Gamma$, $\sigma > 0$ — симметричная матрица,

$$\Gamma u = \left\{ \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leqslant m_j} b_{j\alpha\nu}(x')\, D^\alpha u_\nu(x') \right\}_{j=1}^{m},\ m_j \leqslant m - 1;$$

$$F[x, u(x)] = (F_1[x, u(x)], F_2[x, u(x)], \ldots, F_N[x, u(x)]),$$

$$\Psi[x', u(x')] = (\Psi_1[x', u(x')],\ \Psi_2[x', u(x')], \ldots, \Psi_m[x', u(x')]),$$

причем

$$F_i[x, u(x)] = \widetilde{F}_i(x, u(x),\ D^1 u_1(x), \ldots, D^m u_N(x)), i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\Psi_j[x', u(x')] = \widetilde{\Psi}_j(x', u(x')\ D^1 u_1(x'), \ldots, D^{m-1} u_N(x)), j = 1, 2, \ldots, m,$$

D^k — представляет собой все производные порядка k. Задачи вида (2) возникают, в частности, в теории гибких пластин и оболочек [1].

Пространство $\widehat{H}$, получающееся замыканием множества вектор-функций $u(x) \in C^\infty(\Omega \cup l)$ по норме $(|:|)$, порожденной скалярным произведением

$$[u, v]_{\widehat{H}} = \int_\Omega (\mathrm{Grad}\, u, \mathrm{Grad}\, v)\, dx + \sigma \int_l (\Gamma u, \Gamma v)\, dl_{x'}, \tag{3}$$

назовем энергетическим. $\widehat{H}$ будет сепарабельным гильбертовым пространством [2]. Под обобщенным решением задачи (2) будем понимать элемент $u \in \widehat{H}$, удовлетворяющий равенству:

$$[u, v] = \int_\Omega (F[x, u(x)] + f(x), v(x))\, dx + \int_l (\Psi[x', u(x')] + \varphi(x'), \Gamma v(x'))\, dl_{x'} \tag{4}$$

для всех $v \in \widehat{H}$.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены следующие условия:* 1) *коэффициенты матрицы A принадлежат классу $C^m(\Omega \cup l)$;*

$$f(x) \in L_2(\Omega),\ \varphi(x') \in L_2(l);$$

2) *существует постоянная $\varkappa > 0$ такая, что*

$$|u| \geqslant \varkappa \|u\|_{\widetilde{W}_2^m(\Omega)}, \tag{5}$$

где $\|u\|_{\widetilde{W}_2^m(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{N} \|u_i\|^2_{W_2^m(\Omega)} \right)^{1/2};$

3) *функции* $\widetilde{F}_i(x, u, D^1u, \ldots, D^m u)$ *и* $\widetilde{\Psi}_j(x', u, D^1 u, \ldots, D^{m-1}$ *и измеримы по* x *и* x' *соответственно и непрерывны по остальным аргументам;*

4) *условия на рост:*

$$|\widetilde{F}_i(x, t_\alpha)| \leqslant |K_{1i}(x)| + \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{k=0}^{m} \sum_{\alpha \in Q_k} |B_{ki\nu}(x)| \, |t_{\alpha\nu}(x)|^{\sigma_k}, \; i = 1, \ldots, N,$$

$$|\widetilde{\Psi}_j(x', t'_\beta)| \leqslant |K_{2j}(x')| + \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\beta \in Q_k} |B'_{kj\nu}(x')| \, |t'_{\beta\nu}(x')|^{\sigma_{kj}}, \; j = 1, 2, \ldots, m,$$

где $t_{\alpha\nu}(x) = D^\alpha u_\nu(x)$, $t'_{\beta\nu}(x') \in D^\beta u_\nu(x')$; $K_{1i}(x) \in L_2(\Omega)$, $K_{2j}(x') \in L_2(l)$; $B_{ki\nu}(x) \in C(\Omega)$, $B'_{kj\nu}(x') \in C(l)$; σ_k *и* σ'_{kj} *удовлетворяют условиям:*

$$1 \leqslant \sigma_k < \frac{n+2m}{n-2(m-k)}, \; 1 \leqslant \sigma'_{kj} < \frac{n+2(m-m_j-1)}{n-2(m-k)} \; \text{при } n \geqslant 2m, \tag{6_1}$$

$$1 \leqslant \sigma_k < \frac{2n}{n-2(m-k)}, \; 1 \leqslant \sigma'_{kj} < \frac{2(n-m_j-1)}{n-2(m-k)} \; \text{при } 2m > n \geqslant 2(m-k+1), \tag{6_2}$$

$$1 \leqslant \sigma_k < \infty, \; 1 \leqslant \sigma'_{kj} < \infty \; \text{ при } 1 \leqslant n < 2(m-k+1), \; j = 1, 2, \ldots, m. \tag{6_3}$$

Тогда существует вполне непрерывный оператор C, *отображающий* $\hat{H}$ *в* $\hat{H}$ *и такой, что для всех* u *и* $v \in \hat{H}$

$$\int_\Omega (F[x, u(x)] + f(x), v(x))\, dx + \int_l (\Psi[x', u(x')] + \varphi(x'), \Gamma v(x'))\, dl_{x'} = [C(u), v]_{\hat{H}}. \tag{7}$$

Любое обобщенное решение задачи (2) *является решением уравнения*

$$u = \lambda C(u) \tag{8}$$

и наоборот. Наконец, существует такая неубывающая функция $g(r)$, $0 \leqslant r < \infty$, *что* $|C(u)| \leqslant g(|u|)$ *для всех* $u \in \hat{H}$.

Доказательство. Левая часть (7) является линейным функционалом над $v \in \hat{H}$. Покажем, что этот функционал ограничен.

Рассмотрим случай $n \geqslant 2m$. Тогда из теорем о вложении функциональных пространств [3] вытекает, что $\widetilde{W}_2^m(\Omega)$ вкладывается непрерывно в $\widetilde{L}_r(\Omega)$, где $r < 2n(n-2m)^{-1}$, и, кроме того, для функций из $W_2^m(\Omega)$ определены на l производные до порядка $m-1$, принадлежащие $L_{r_k}(l)$, где $r_k < 2(n-1)(n-2(m-k))^{-1}$ (k—порядок производной). Выберем s и s_k удовлетворяющими условию $r^{-1} + s^{-1} = 1$, $r_k^{-1} + s_k^{-1} = 1$. Тогда $\sigma_k s < 2n(n-2m+2k)^{-1}$; $\sigma'_{kj} s_k < 2(n-1)(n-2(m-m_j))^{-1}$, $k \leqslant m_j$; и, таким образом, $W_2^{m-k}(\Omega)$ вкладывается непрерывно в $L_p(\Omega)$, $p = \sigma_k s$, а $W_2^{m-k-\frac{1}{2}}(l)$ — в $L_{p'_j}(l)$, $p_j = \sigma'_{kj} s_k$. Следовательно, если $|\alpha| = k$, то

$$\int_\Omega |D^\alpha u_\nu(x)|^{\sigma_k} |v_\mu(x)| dx \leqslant \| D^\alpha u_\nu(x)\|_{L_p(\Omega)}^{\sigma_k} \| v_\mu(x)\|_{L_r(\Omega)} \leqslant \text{const} \| D^\alpha u_\nu \|_{m-k,2}^{\sigma_k} \| v_\mu \|_{m,2} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \| u_\nu \|_{m,2}^{\sigma_k} \| v_\mu \|_{m,2} \leqslant \text{const} |u_\nu|^{\sigma_k} |v_\mu|, \; \nu, \mu = 1, 2, \ldots, N, \tag{9}$$

$$\int_l |D^\alpha u_\nu(x')|^{\sigma'_{kj}} |D^\beta v_\mu(x')| \, dl_{x'} \leqslant \| D^\alpha u_\nu \|_{L_{p_j}(l)}^{\sigma'_{kj}} \| D^\beta v_\mu \|_{L_{r_j}(l)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\, \| D^{\alpha} u_{\nu} \|^{\sigma'_{kj}}_{W_2^{m-\frac{1}{2}}(l)} \| v'_{\mu} \|_{W_2^{m-\frac{1}{2}}(l)} \leqslant \mathrm{const}\, \| u_{\nu} \|^{\sigma'_{kj}}_{m,2} \| v_{\mu} \|_{m,2} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{cost}\, | u_{\nu} |^{\sigma'_{kj}} | v_{\mu} |, \quad j = 1, 2, \ldots, m; \quad | \beta | \leqslant m_j; \quad \nu, \mu = 1, 2, \ldots, N. \quad (10)$$

Из условия (4), учитывая (9) и (10), получаем

$$\left| \int_{\Omega} (F[x, u(x)] + f(x), v(x))\, dx + \int_{l} (\Psi[x', u(x')] + \varphi(x'), \Gamma v(x'))\, dl_{x'} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \left\{ \| f(x) \|_{\widetilde{L}_2(\Omega)} + \| \varphi(x') \|_{\widetilde{L}_2(l)} + N \sum_{k=0}^{m} \sum_{\alpha \in Q_k} | u |^{\sigma_k} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\beta \in Q_k} | u |^{\sigma'_{kj}} \right\} | v |, \quad (11)$$

т. е. при $n \geqslant 2m$ функционал в левой части (7) является линейным по $v \in \hat{H}$ и ограниченным в $\hat{H}$ функционалом. По теореме Рисса [2] такой функционал можно представить в виде $[C(u), v]_{\hat{H}}$.

Таким образом, представление (7) имеет место. Функция $g(|u|)$ задается множителем при $|v|$ в правой части неравенства (11).

В случаях (6_2) и (6_3) доказательство проводится аналогично. Докажем теперь вполне непрерывность оператора $C(u)$ в $\hat{H}$. Рассмотрим случай $n \geqslant 2m$. Так как $\sigma_k < (n + 2m)(n - 2m + 2k)^{-1}$, $\sigma'_{kj} < (n + 2(m - m_j - 1))(n - 2m + 2k)^{-1}$, то существуют постоянные $\varepsilon_k \geqslant 0$ и $\varepsilon'_{kj} \geqslant 0$ такие, что $\sigma_k < (n + 2m)(n - 2m + 2k)^{-1}(1 + \varepsilon_k)^{-1}$ и $\sigma'_{kj} \leqslant (n + 2(m - m_j - 1))(n - 2m + 2k)^{-1}(1 + \varepsilon'_{kj})^{-1}$. Определим

$$q_k = 2n(n - 2(m - k))^{-1}(1 + \varepsilon_k)^{-1},$$

$$q'_{kj} = 2(n - 1)(n - 2(m - k))^{-1}(1 + \varepsilon'_{kj})^{-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

выбирая ε_k и ε'_{kj} так, чтобы $q_k \geqslant 1$ и $q'_{kj} \geqslant 1$.

В силу теоремы Кондрашова [3] операторы вложения

$$J_k^{\Omega} : W_2^{m-k}(\Omega) \to L_{q_k}(\Omega), \quad J^l_{k'j} : W_{2j}^{m-k'-\frac{1}{2}}(l) \to L_{q'_{k'j}}(l), \quad k' \leqslant m_j;$$
$$j = 1, 2, \ldots, m$$

вполне непрерывны. Таким образом, преобразования

$$J^{\Omega} = \prod_{k=0}^{m} \prod_{\alpha \in Q_k} W_2^{m-k}(\Omega) \to \prod_{k=0}^{m} \prod_{\alpha \in Q_k} L_{q_k}(\Omega),$$

$$J^l_j = \prod_{k=0}^{m-1} \prod_{\beta \in Q_k} W_{2j}^{m-k-\frac{1}{2}}(l) \to \prod_{k=0}^{m-1} \prod_{\beta \in Q_k} L_{q'_{kj}}(l), \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

являются вполне непрерывными.

Определим операторы

$$F_i : \prod_{k=0}^{m} \prod_{\alpha \in Q_k} L_{q_k}(\Omega) \to L_{p_i}(\Omega), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\Psi_j : \prod_{k=0}^{m-1} \prod_{\beta \in Q_k} L_{q'_{kj}}(l) \to L_{p'_j}(l), \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

a) *если T преобразует B_r в B_r, то он имеет неподвижную точку в B_r;* b) *если T преобразует $\hat{H}$ в $\hat{H}$ и $\lambda_0 > 0$, то или существует $u \in \hat{H}$ такая, что $u = \lambda_0 T(u)$, или для любого $r > 0$ существует $u \in S_r$ и $\lambda \in (0, \lambda_0)$ такое, что $u = \lambda T(u)$.*

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1. Пусть B_r — шар радиуса r в пространстве $\hat{H}$ и s_r — его поверхность. Тогда:*

a) *если $|C(u)| > 0$, то для любого $r > 0$ найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что при $0 < \lambda \leqslant \lambda_0$ существует решение уравнения* (8), *принадлежащее B_r;*

b) *если задано λ_0, то или существует $u \in \hat{H}$ такое, что $u = \lambda_0 C(u)$, или для любого $r > 0$ существует решение уравнения* (8) *$u \in S_r$ для любых $\lambda < \lambda_0$.*

Доказательство. Часть a) теоремы 2 следует из части a) теоремы Шаудера, если положить

$$T(u) = \lambda C(u) \text{ и } \lambda_0 = \frac{R}{g(R)}, \text{ где } R \geqslant r. \tag{14}$$

Часть b) вытекает из части b) теоремы Шаудера.

Замечание. Все предыдущие рассуждения справедливы и в случае, если оператор краевых условий $B = T$, т. е. $\sigma = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Березовский, Ю. И. Жарий, Нелинейные краевые задачи теории гибких пластин и пологих оболочек, Изд. Института математики АН УССР, К., 1970.
2. С. Г. Михлин, Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, М., 1952.
3. С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, 1950.
4. М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, М., 1956.
5. R. A. Adams, A quasi—linear elliptic boundary value broblem, Canad. J. of Math., v. 18, № 5, 1966.
6. J. Cronin, Fixed points and topological digree in nonlinear analisis, A. M. S. Math. Survey, № 11, 1964.

Поступила 9.XII, 1971 г.
Институт математики АН УССР