УДК 517.54

Об одном классе сжимающих операторов, связанных с делимостью аналитических функций

Б. И. Коренблюм, В. М. Файвышевский

При изучении структуры инвариантных подпространств оператора умножения на независимую переменную в различных пространствах функций, регулярных в единичном округе, оказывается полезными утверждения, устанавливающие, что внешняя часть функции $f(z)$ (в смысле ее канонической факторизации [1, стр. 100]) обладает не меньшей степенью «гладкости», чем $f(z)$. Результаты подобного рода содержатся в [1] для случая пространств A и H^p, в [2] для пространства D функций с ограниченным интегралом Дирихле и, наконец, в [3] и [4] для пространств H_n^2.

В данной заметке показано, что теорема, аналогичная доказанной в [4], имеет место для более широкого класса пространств, причем предлагаемое доказательство значительно проще.

Определение 1. Для произвольной ненулевой последовательности положительных чисел $\langle p \rangle = \{p_0, p_1, \ldots\}$ $(\underline{\lim} \sqrt[n]{p_n} = 1)$ через H_n^2 будем обозначать класс функций $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, регулярных в единичном круге $K = \{z : |z| < 1\}$ и таких, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k |a_k|^2 < \infty$.

Ясно, что $H^2_{\langle p \rangle}$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(f, g)_{\langle p \rangle} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k a_k b_k;\ f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k;\ g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

Соответствующую норму обозначим через $\|\cdot\|_{\langle p \rangle}$. Приведем примеры пространств типа $H^2_{\langle p \rangle}$.

Определение 2 (см. также [3 и 4]). $H^2_n\ (n = 1, 2, \ldots)$ — пространство функций $f(z)$, регулярных в K, и таких, что $f^{(n)} \in H^2$;

$$\|f\|_{H^2_n} = \|f\|_{H^2} + \|f^{(n)}\|_{H^2}.$$

Определение 3. $D^2_n\ (n = 1, 2, \ldots)$ — класс функций $f(z)$, регулярных в K, и таких, что

$$\iint\limits_K |f^{(n)}(x + iy)|^2 dx dy < \infty.$$

Легко видеть, что H^2_n и соответственно нормированный класс D^2_n являются пространствами типа $H^2_{\langle p \rangle}$ с монотонно возрастающими весовыми последовательностями.

В дальнейшем рассматриваем лишь неубывающие весовые последовательности $\langle p \rangle = \{p_0, p_1, \ldots\}$; так как для пространств $H^2_{\langle p \rangle}$, определяемых такими весами, справедливо включение $H^2_{\langle p \rangle} \subseteq H^2$, то функции из этих пространств имеют почти всюду на окружности угловые граничные значения. Как обычно, отождествляем функции из H^2 с их граничными значениями.

Оператор проектирования из $L^2(C)$, $C = \{z : |z| = 1\}$, на H^2 обозначим через P. Ясно, что

$$(Pf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi\ (f \in L^2(C);\ |z| < 1).$$

Определение 4. Функция $u(l^{i\theta}) \in L^\infty(C)$ называется квазимультипликатором пространства $H^2_{\langle p \rangle}$, если для любой $f \in H^2_{\langle p \rangle}$ выполнено неравенство

$$\|P(uf)\|_{\langle p \rangle} \leqslant \|u\|_\infty \|f\|_{\langle p \rangle}. \tag{1}$$

Каждому пространству $H^2_{\langle p \rangle}$ сопоставим класс $M_{\langle p \rangle}$ квазимультипликаторов этого пространства.

Теорема 1. *Пересечение классов $M_{\langle p \rangle}$, где $\langle p \rangle$ пробегает совокупность неубывающих последовательностей положительных чисел, состоит из тех и только тех функций $u \in L^\infty(C)$, которые почти всюду совпадают с предельными значениями ограниченных в области $\{z : |z| > 1\}$ аналитических функций.*

Доказательство. Если $u(e^{i\theta}) \in L^\infty(C)$ не совпадает почти всюду с предельными значениями некоторой ограниченной в области $\{z : |z| > 1\}$ аналитической функции, то некоторый коэффициент Фурье этой функции с положительным номером n_0 отличен от нуля, $u(e^{i\theta})$ не будет квазимультипликатором для пространства $H^2_{\langle p \rangle}$ с такой весовой последовательностью $\langle p \rangle = \{p_0, p_1, \ldots\}$, что $p_0 < p_{n_0}$; в этом легко убедиться, полагая в (1) $f \equiv 1$.

Пусть

$$u(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{-k} e^{-ik\theta} \text{ и } f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k;$$

$$[P(uf)](z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k;\ f \in H^2_{\langle p \rangle},\ \| u \|_\infty = 1.$$

Покажем вначале, что при любом $n \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \geqslant \sum_{k=n}^{\infty} |b_k|^2. \tag{2}$$

При любом $n \geqslant 0$ имеем

$$\| P(ufz^{-n}) \|_{H^2} = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2. \tag{3}$$

С другой стороны,

$$\| P(ufz^{-n}) \|_{H^2} = \left\| P \left| u(e^{i\theta}) \sum_{k=n}^{\infty} b_k e^{ik\theta} \right| \right\|_{H^2} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} |b_k|^2. \tag{4}$$

Сравнивая (3) и (4), получим (2).

Для произвольной монотонно неубывающей последовательности $\langle p \rangle = \{p_0, p_1, \ldots\}$, применяя преобразование Абеля и учитывая неравенство (2), имеем

$$\| P(uf) \|^2_{\langle p \rangle} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k |c_k|^2 = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 + \sum_{l=1}^{\infty} (p_l - p_{l-1}) \sum_{k=l}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant$$

$$\leqslant p_0 \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2 + \sum_{l=1}^{\infty} (p_l - p_{l-1}) \sum_{k=l}^{\infty} |b_k|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k |b_k|^2 = \| f \|^2_{\langle p \rangle}.$$

Теорема доказана.

Следствие. Если $f(z) \in H^2_{\langle p \rangle}$, а внутренняя функция $G(z)$ является делителем внутренней части $f(z)$ (см. [1, стр. 100]), то функция fG^{-1} принадлежит $H^2_{\langle p \rangle}$ и $\| fG^{-1} \|_{\langle p \rangle} \leqslant \| f \|_{\langle p \rangle}$.

Остановимся теперь на аналоге теоремы 1 для случая пространств аналитических функций в полуплоскости.

Пусть F — изометрический оператор Фурье — Планшереля.

Определение 5. Для произвольной неубывающей положительной функции $p(x)$ на $[0, \infty)$ определим класс $\mathbf{H}^2_{\langle p(x) \rangle}$ регулярных в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ функций следующим образом:

$$\mathbf{H}^2_{\langle p(x) \rangle} = \left\{ f : f = Fg,\ g(x) = 0\ (x < 0),\ \int_0^\infty p(x) |g(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Подобно тому, как это сделано для пространства $H^2_{\langle p \rangle}$ в $\mathbf{H}^2_{\langle p(x) \rangle}$, можно задать скалярное произведение так, что $\mathbf{H}^2_{\langle p(x) \rangle}$ станет гильбертовым пространством. Функции из $\mathbf{H}^2_{\langle p(x) \rangle}$ будем отождествлять и их граничными значениями на вещественной оси R.

Определение 6. Функцию $u \in L^\infty(R)$ назовем квазимультипликатором пространства $\mathbf{H}^2_{\langle p(x) \rangle}$, если для произвольной функции из $\mathbf{H}^2_{\langle p(x) \rangle}$ справедливо неравенство

$$\| Q(uf) \|_{\mathbf{H}^2_{\langle p(x) \rangle}} \leqslant \| u \|_\infty \| f \|_{\mathbf{H}^2_{\langle p(x) \rangle}},$$

Q обозначает здесь оператор проектирования из пространства $L^2(R)$ на H^2 в нижней полуплоскости. Каждому пространству $\mathbf{H}^2_{\langle p(x)\rangle}$ сопоставим класс квазимультипликаторов $\mathbf{M}_{\langle p,x)\rangle}$.

Теорема 2. *Пересечение классов* $\mathbf{M}_{\langle p(x)\rangle}$, *где* $p(x)$ *пробегает совокупность монотонно неубывающих на* $[0, \infty)$ *положительных функций, состоит из тех и только тех функций* $u \in L^\infty(R)$, *которые почти всюду совпадают с предельными значениями ограниченных функций, регулярных в верхней полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$.

Доказательство теоремы 2 не приводим, так как оно аналогично доказательству теоремы 1.

Некоторые дополнительные трудности, связанные с тем, что оператор Фурье — Планшереля не определен на всем $L^\infty(R)$, легко преодолеваются с помощью того факта, что оператор умножения на функции из $L^\infty(R)$ можно аппроксимировать операторами умножения на функции из $L^2(R) \cap L^\infty(R)$ в смысле топологии сильной сходимости операторов.

В заключение сформулируем одну задачу, решение которой нам неизвестно.

Задача. Описать класс $M_{\langle p\rangle}$ ($\mathbf{M}_{\langle p(x)\rangle}$) квазимультипликаторов данного пространства $H^2_{\langle p\rangle}$ ($\mathbf{H}^2_{\langle p(x)\rangle}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, ИЛ, М., 1963.
2. L. Carleson, A representation formula the Dirichlet integral, Math. Z., **73**, 2, 1960, 190—196.
3. Б. И. Коренблюм, В. С. Королевич, Об аналитических функциях, регулярных в круге и гладких на его границе, Математические заметки, т. 7, вып. 2, 1970.
4. Б. И. Коренблюм, Об одном экстремальном свойстве внешних функций, Математические заметки, т. 10, вып. 1, 1971.

Поступила 31.V 1971 г.

Киевский инженерно-строительный институт,
НИИАСС Госстроя УССР