УДК 517.51

Об одном предельном соотношении приближения сплайн-функциями

А. С. Логинов

Эта статья вызвана появлением в печати работы В. Л. Великина [1], где, в частности, дается оценка приближения сплайнами определенного класса (см. ниже неравенство (1)) функций из H_ω. Автором данной работы также изучались (см. [2, 3]) подобные вопросы (в случае приближения ломаными). Первые же результаты, относящиеся к выпуклым модулям непрерывности, принадлежат В. Н. Малоземову [4]. Что касается соотношения между приводимыми здесь результатами и оценками В. Л. Великина, то об этом будет сказано после соответствующих формулировок. В работе в большинстве использованы обозначения из [1].

Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на $[a, b]$ и $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots \ldots < x_n = b\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Обозначим $\Delta_k = x_{k+1} - x_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и $d = \max\limits_{0 \leqslant k < n} \Delta_k$. Для натурального числа $r \geqslant 2$ положим $\varphi = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{r-1}(x)\}$, где $\varphi_k(x)$ — непрерывные на $[a, b]$ функции, и, наконец, под $s(f, \varphi; x)$ понимаем $r-1$ раз непрерывно дифференцируемую на $[a, b]$ функцию (для $r = 1$ — непрерывную функцию), которая есть многочлен $2r-1$ степени на $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, причем такой, что $s(f, \varphi; x_k) = f(x_k)$, $s^{(m)}(f, \varphi; x_k) = \varphi_m(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$; $m = 1, \ldots, r-1$.

Сплайн-функции $s(f, \varphi; x)$, порожденные нулевым вектором φ, обозначаются просто через $s(f; x)$. В упомянутой выше работе [1] было доказано соотношение $\inf\limits_{\varphi} \sup\limits_{f\in H_\omega} \| f(x) - s(f, \varphi; x)\|_E = \sup\limits_{f\in H_\omega} \| f(x) - s(f; x)\|_E$, где E — любое линейное нормированное пространство из непрерывных функций f на $[0, 1]$. В той же работе была проведена оценка

$$\sup_{f\in H_\omega} \| f(x) - s(f; x)\|_C \leqslant \frac{3}{2}\, \omega\left(\frac{d}{2}\right), \tag{1}$$

с неулучшаемой константой $\frac{3}{2}$. В случае выпуклого модуля непрерывности $\omega(\delta)$ было доказано равенство $\sup\limits_{f\in H_\omega} \| f(x) - s(f; x)\|_C = \omega\left(\frac{d}{2}\right)$. Докажем следующие две теоремы.

Теорема 1. *Для произвольного разбиения $\Delta = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ отрезка $[a, b]$, числа $r \geqslant 1$ и произвольного модуля непрерывности $\omega(\delta)$, заданного на $[0, b-a]$, имеет место равенство*

$$\sup_{f\in H_\omega(a,b)} \| f(x) - s(f; x)\|_{c(a,b)} = \max_{\substack{x+y=1\\ 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1}} [\omega(dx)\,\Omega_r(y) + \omega(dy)\,\Omega_r(x)],$$

где $\Omega_r(x) = x^r \sum\limits_{s=0}^{r-1} C_{s+r-1}^{r-1}(1-x)^s$, $C_{m+n}^n = \frac{(m+n)!}{m!n!}$ — число сочетаний из $m+n$ по n.

Теорема 2. *Для произвольного модуля непрерывности $\omega(\delta)$ числа $M_r(\omega)$, определенные формулой $M_r(\omega) = \max\limits_{\substack{x+y=1\\ 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1}} [\omega(dx)\,\Omega_r(y) + \omega(dy)\,\Omega_r(x)]$, не возрастают по r, т. е. $M_r(\omega) \geqslant M_{r+1}(\omega)$, $r \geqslant 1$ и, кроме того,*

$$\lim_{r\to\infty} M_r(\omega) = \omega\left(\frac{d}{2}\right). \tag{2}$$

Замечание. При фиксированном r, как показано в [1], имеет место равенство $\sup\limits_{\omega\neq 0} \frac{M_r(\omega)}{\omega\left(\frac{d}{2}\right)} = \frac{3}{2}$. Равенство (2) показывает, что при фиксированном ω имеет место $\inf\limits_{r} \sup \frac{M_r(\omega)}{\omega\left(\frac{d}{2}\right)} = 1$.

Доказательство теоремы 1. Интерполяционная формула Эрмита (см. [5, стр. 51]) для двух узлов x_k, x_{k+1} при $x \in [x_k, x_{k+1}]$ дает

$$s(f; x) = f(x_k)(x - x_{k+1})^r \sum_{s=0}^{r-1} C_s^{(1)}(x - x_k)^s + f(x_{k+1})(x - x_k)^r \times$$
$$\times \sum_{s=0}^{r-1} C_s^{(2)}(x - x_{k+1})^s, \tag{3}$$

где $C_s^{(1)}$, $C_s^{(2)}$ — коэффициенты разложений

$$\frac{1}{(z - x_{k+1})^r} = \sum_{s=0}^{\infty} C_s^{(1)}(z - x_k)^s, \quad \frac{1}{(z - x_k)^r} = \sum_{s=0}^{\infty} C_s^{(2)}(z - x_{k+1})^s.$$

Таким образом,

$$C_s^{(1)} = \frac{(-1)^s (r+s-1)!}{s!\,(r-1)!\,(x_k - x_{k+1})^{r+s}} = \frac{(-1)^r C_{s+r-1}^{r-1}}{\Delta_k^{r+s}},$$

$$C_s^{(2)} = \frac{(-1)^s (r+s-1)!}{s!\,(r-1)!\,(x_{k+1} - x_k)^{r+s}} = \frac{(-1)^s C_{s+r-1}^{r-1}}{\Delta_k^{r+s}}.$$

Подставляя эти выражения в (3), находим

$$s(f;\, x) = f(x_k)\left(\frac{x_{k+1}-x}{\Delta_k}\right)^r \sum_{s=0}^{r-1} C_{s+r-1}^{r-1}\left(\frac{x-x_k}{\Delta_k}\right)^s +$$

$$+ f(x_{k+1})\left(\frac{x-x_k}{\Delta_k}\right)^r \sum_{s=0}^{r-1} C_{s+r-1}^{r-1}\left(\frac{x_{k+1}-x}{\Delta_k}\right)^s.$$

Окончательно, если положить $\delta = x - x_k$, получим

$$s(f;\, x) = f(x_k)\,\Omega_r\left(1 - \frac{\delta}{\Delta_k}\right) + f(x_{k+1})\,\Omega_r\left(\frac{\delta}{\Delta_k}\right) \tag{4}$$

при $x \in [x_k, x_{k+1}]$ (ср. (3) из [1]). Так как $\Omega_r(x) + \Omega_r(y) = 1$ при $x + y = 1$ $\Big($достаточно взять $f(x) \equiv 1$ и воспользоваться единственностью полинома $s(1;\, x)$, тогда $1 \equiv s(1;\, x) = \Omega_r\left(1 - \frac{\delta}{\Delta_k}\right) + \Omega_r\left(\frac{\delta}{\Delta_k}\right)\Big)$, то

$$f(x) - s(f;\, x) = [f(x) - f(x_k)]\,\Omega_r\left(1 - \frac{\delta}{\Delta_k}\right) + [f(x) - f(x_{k+1})]\,\Omega_r\left(\frac{\delta}{\Delta_k}\right) \tag{5}$$

при $x \in [x_k, x_{k+1}]$ (см. также, например, (8) из [1]).

Обозначим $A_p = \max\limits_{x+y=1} [\omega(\Delta_p \cdot x)\,\Omega_r(y) + \omega(\Delta_p \cdot y)\,\Omega_r(x)]$, $p = 0, 1, \ldots, n-1$ и $A_{p_0} = \max\limits_{0 \leqslant p < n} A_p$. Из (5) следует, что

$$\| f(x) - s(f;\, x) \|_C \leqslant A_{p_0}. \tag{6}$$

Пусть теперь $0 \leqslant \bar{x} \leqslant \bar{y} \leqslant \bar{x} + \bar{y} = 1$ таковы, что $A_{p_0} = \omega(\bar{x}\,\Delta_{p_0})\,\Omega_r(\bar{y}) + \omega(\bar{y}\,\Delta_{p_0})\,\Omega_r(\bar{x})$. Рассмотрим функцию $f_0(x)$, построенную в [3, стр. 48]:

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \in [a, x_{p_0}], \\ \omega(x - x_{p_0}) \quad \text{при } x \in [x_{p_0}, x_{p_0} + v_0], \\ \omega(v_0) - \omega(\Delta_{p_0} - v_0) + \omega(x_{p_0+1} - x) \quad \text{при } x \in [x_{p_0} + v_0, x_{p_0+1}], \\ f_0(x_{p_0+1}) \quad \text{при } x \in (x_{p_0+1}, b], \end{cases}$$

где $v_0 = \Delta_{p_0}\bar{y}$. Положим для удобства $u_0 = \Delta_{p_0} \cdot \bar{x}$ и подсчитаем значение разности $f_0(x) - s(f_0;\, x)$ в точке $x_{p_0} + v_0$. Учитывая (5), имеем $f_0(x_{p_0} + v_0) - s(f_0;\, x_{p_0} + v_0) = \omega(v_0)\,\Omega_r(\bar{x}) + \omega(u_0)\,\Omega_r(\bar{y}) = A_{p_0}$.
Отсюда и из (6) следует утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 разобьем на две леммы.

Лемма 1. *Имеет место следующее рекуррентное соотношение:* $\Omega_{r+1}(x) = \Omega_r(x) + C_{2r-1}^r x^r (1-x)^r (2x-1)$, $r \geqslant 1$, $x \in [0, 1]$.

Доказательство. Имеем

$$\Omega_{r+1}(x) = x^{r+1}\sum_{s=0}^{r} C_{s+r}^{r}(1-x)^s = x^{r+1}(1-x)^r C_{2r}^{r} + x^{r+1}\sum_{s=0}^{r-1} C_{s+r}^{r}(1-x)^s =$$

$$= C_{2r}^{r}x^{r+1}(1-x)^r + x^{r+1}\sum_{s=0}^{r-1} C_{s+r-1}^{r-1}(1-x)^s + x^{r+1}\sum_{s=1}^{r-1} C_{s+r-1}^{r}(1-x)^s.$$

Здесь мы воспользовались формулой для сочетаний $C_{s+r}^{r} = C_{s+r-1}^{r-1} + C_{s+r-1}^{r}$, которая вырождается при $s = 0$, что обусловило исчезновение первого члена в последней сумме. Продолжая преобразования дальше, получим: $\Omega_{r+1}(x) =$

$$= C_{2r}^{r}x^{r+1}(1-x)^r + x\Omega_r(x) + x^{r+1}\sum_{s=0}^{r-2} C_{s+r}^{r}(1-x)^{s+1} = C_{2r}^{r}x^{r+1}(1-x)^r + x\Omega_r(x) +$$

$+ (1-x)\,[\Omega_{r+1}(x) - x^{r+1}\sum_{s=r-1}^{r} C_{s+r}^{r}(1-x)^s]$. Отсюда следует $x\Omega_{r+1}(x) =$

$= C_{2r}^{r}x^{r+1}(1-x)^r + x\Omega_r(x) - x^{r+1}\sum_{s=r-1}^{r} C_{s+r}^{r}(1-x)^{s+1}$, далее $\Omega_{r+1}(x) - \Omega_r(x) =$
$= x^r(1-x)^r\,[C_{2r}^{r} - C_{2r-1}^{r} - C_{2r}^{r}(1-x)] = x^r(1-x)^r(xC_{2r}^{r} - C_{2r-1}^{r}) = C_{2r-1}^{r} \times$
$\times\, x^r(1-x)^r(2x-1)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $0 < \delta < \frac{1}{2}$ *и* $D_\delta = [0, 1] - \left(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta\right)$, *а*

$$\Omega_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \in [0,\ 1/2), \\ 1 & \text{при} \quad x \in (1/2,\ 1]. \end{cases}$$

Тогда последовательность $\{\Omega_r\}_{r=1}^{\infty}$ *сходится равномерно на* D_δ *к* $\Omega_\infty(x)$.

Доказательство. Если $x < \frac{1}{2}$, то $\frac{1}{2} < 1 - x$ и тогда для $1 \leqslant s \leqslant$ $\leqslant r$ имеем $1 \leqslant \frac{r+s}{s}(1-x)$ или, что то же, $C_{s+r-1}^{r}(1-x)^{s-1} \leqslant C_{s+r}^{r}(1-$ $-x)^s$. На основании этого можем оценить $\Omega_{r+1}(x)$ следующим образом:

$$\Omega_{r+1}(x) = x^{r+1}\sum_{s=0}^{r} C_{s+r}^{r}(1-x)^s \leqslant (r+1)\,x^{r+1}(1-x)^r C_{2r}^{r}. \tag{7}$$

По формуле Стирлинга (см. [6, стр. 371])

$$C_{2r}^{r} = \frac{(2r)!}{(r!)^2} = \frac{\sqrt{2\pi 2r}\left(\frac{2r}{e}\right)^{2r} e^{\frac{\theta_1}{24r}}}{2\pi r\left(\frac{r}{e}\right)^{2r} e^{\frac{\theta_2}{6r}}} \leqslant \frac{2^{2r}e}{\sqrt{\pi r}}.$$

Отсюда и из (7) вытекает (при $0 \leqslant x \leqslant \delta$)

$$\Omega_{r+1}(x) \leqslant \frac{e}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}\right)x\,[x(1-x)\,4]^r \leqslant \frac{e}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}\right)\delta\,[4\cdot\delta(1-\delta)]^r,$$

$$\text{но } 4\cdot\delta(1-\delta) < 1.$$

Таким образом, $\Omega_r(x)$ сходится равномерно к нулю на $[0, \delta]$. Сходимость $\Omega_r(x)$ к единице на $[1-\delta, 1]$ следует из симметрии функции $\Omega_r(x)$ относительно точки $(1/2,\ 1/2)$. Лемма 2 доказана.

Докажем теперь, что $M_{r+1}(\omega) \leqslant M_r(\omega)$.

Пусть $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant x+y=1$, тогда, используя лемму 1, получаем

$$\omega(dx)\,\Omega_{r+1}(y)+\omega(dy)\,\Omega_{r+1}(x)=\omega(dx)\,\Omega_r(y)+\omega(dy)\,\Omega_r(x)+C_{2r-1}^r[y^r(1-$$
$$-y)^r(2y-1)\,\omega(dx)+x^r(1-x)^r(2x-1)\,\omega(dy)]=\omega(dx)\,\Omega_r(y)+$$
$$+\omega(dy)\,\Omega_r(x)-C_{2r-1}^r x^r(1-x)^r(2x-1)\,[\omega(dy)-\omega(dx)]$$

(здесь опять воспользовались симметрией $\Omega_r(x)$ и леммой 1, именно, из $\Omega_r(x)+\Omega_r(y)=1$ непосредственно, с учетом леммы 1, следует, что $x^r(1-x)^r(2x-1)+y^r(1-y)^r(2y-1)=0$). Слагаемое в последнем равенстве справа отрицательно, откуда и следует монотонность по r последовательности $\{M_r(\omega)\}_{r=1}^{\infty}$. Наконец докажем, что $\lim\limits_{r\to\infty} M_r(\omega)=\omega(d/2)$. Пусть $0<\delta<1/2$, тогда, очевидно, имеем

$$M_r(\omega)=\max\{\max_{\substack{x+y=1\\ x\leqslant\delta}} A_r(x),\ \max_{\substack{x+y=1\\ \delta\leqslant x\leqslant y}} A_r(x)\}, \tag{8}$$

где для удобства обозначаем: $A_r(x)=\omega(dx)\,\Omega_r(y)+\omega(dy)\,\Omega_r(x)$. (Напоминаем, что здесь x и y связаны соотношением $x+y=1$.) Пусть $\varepsilon>0$. Выберем $\delta\in(0,\ 1/2)$ так, что будут выполнены неравенства $|\omega(d/2)-\omega(xd)|<\varepsilon/2$, $|\omega(d/2)-\omega(yd)|<\varepsilon$ при $\delta\leqslant x\leqslant y\leqslant x+y=1$. Тогда

$$\left|\omega\left(\frac{d}{2}\right)-\max_{\substack{x+y=1\\ \delta\leqslant x\leqslant y}} A_r(x)\right|<\varepsilon \tag{9}$$

при любом $r\geqslant 1$. В силу равномерной сходимости $\Omega_r(x)$ к $\Omega_\infty(x)$ на D_δ имеем $\lim\limits_{r\to\infty}\max\limits_{\substack{x+y=1\\ x\leqslant\delta}} A_r(x)=\max\limits_{\substack{x+y=1\\ x\leqslant\delta}}[\omega(dx)\,\Omega_\infty(y)+\omega(dy)\,\Omega_\infty(x)]=\omega(d\delta)$.

Пусть R таково, что при $r>R$ $|\omega(d\delta)-\max\limits_{\substack{x+y=1\\ x\leqslant\delta}} A_r(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Согласно выбору δ, имеем

$$\left|\omega\left(\frac{d}{2}\right)-\max_{\substack{x+y=1\\ x\leqslant\delta}} A_r(x)\right|<\varepsilon \tag{10}$$

при $r>R$. Из (8) — (10) вытекает, что $\left|M_r(\omega)-\omega\left(\frac{d}{2}\right)\right|<\varepsilon$ при $r>R$.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Великин, О наилучшем приближении сплайн-функциями на классах непрерывных функций, Математические заметки, т. 8, вып. 1, 1970.
2. А. С. Логинов, Приближение непрерывных функций ломаными, Математические заметки, т. 6. № 2, 1969.
3. А. С. Логинов, Оценки приближения ломаными непрерывных функций класса H_ω, Вестник МГУ, серия 1, математика, механика, № 6, 1970.
4. В. Н. Малоземов, Об отклонении ломаных, Вестник ЛГУ, № 7, 1966.
5. В. И. Крылов, Приближенное вычисление интегралов, «Наука», М., 1967.
6. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, «Наука», М., 1966.

Поступила 27.IV 1971 г.

Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР